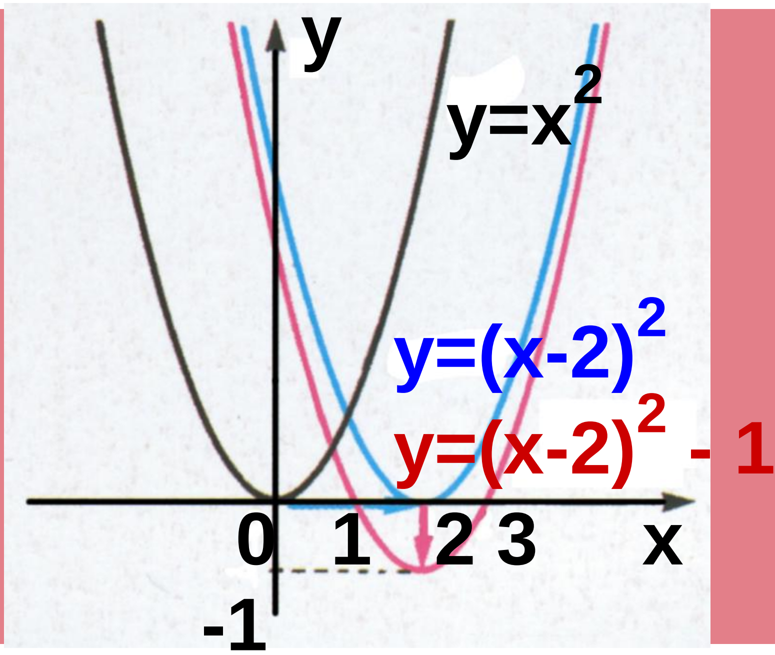
Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α ΣΒΕΡΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ
Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



Τόμος 3ος

Μαθηματικά

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 3ος

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Κατσαργύρης Βασίλειος
Παπασταυρίδης Σταύρος
Πολύζος Γεώργιος
Σβέρκος Ανδρέας

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός

Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος

Καθηγητής Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου

Παπασταυρίδης Σταύρος

Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος

Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.

Σβέρκος Ανδρέας

Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π.Ι.

Σκούρας Αθανάσιος

Σύμβουλος του Π.Ι.

Πολύζος Γεώργιος

Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Ελευθερόπουλος Ιωάννης

Καθηγητής Μαθηματικών,
Αποσπασμένος στο Π.Ι.

Ζώτος Ιωάννης *Καθηγητής Μαθ/κών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.*

Καλλιπολίτου Ευρυδίκη *Καθηγήτρια Μαθ/κών, Αποσπασμένη στο Π.Ι.*

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας Υπουργείου Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

Μαθηματικά

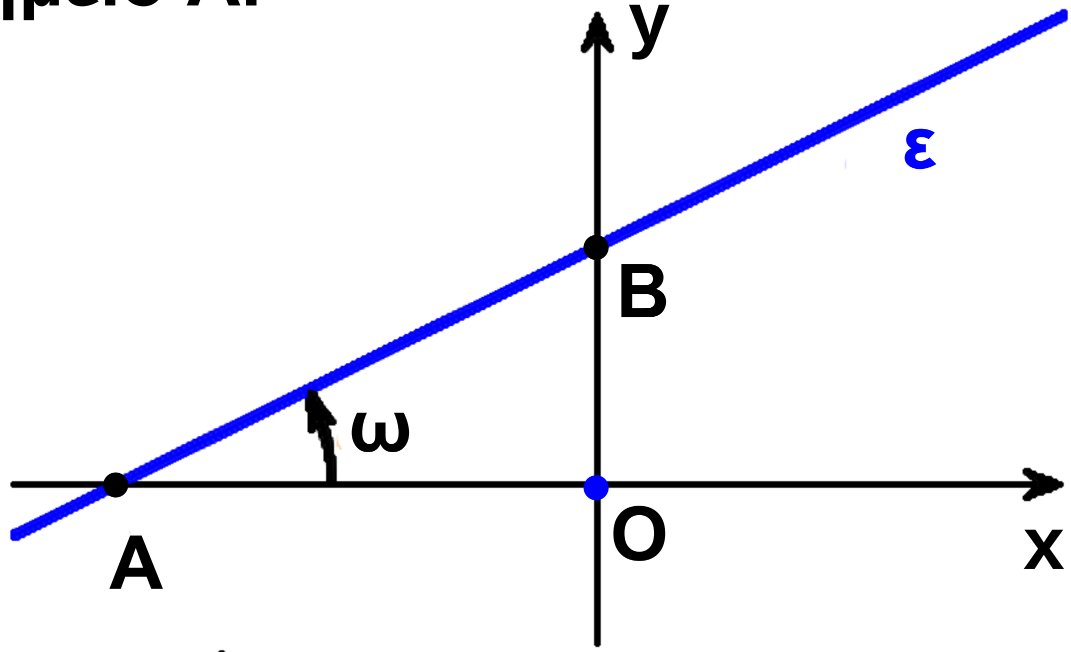
Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

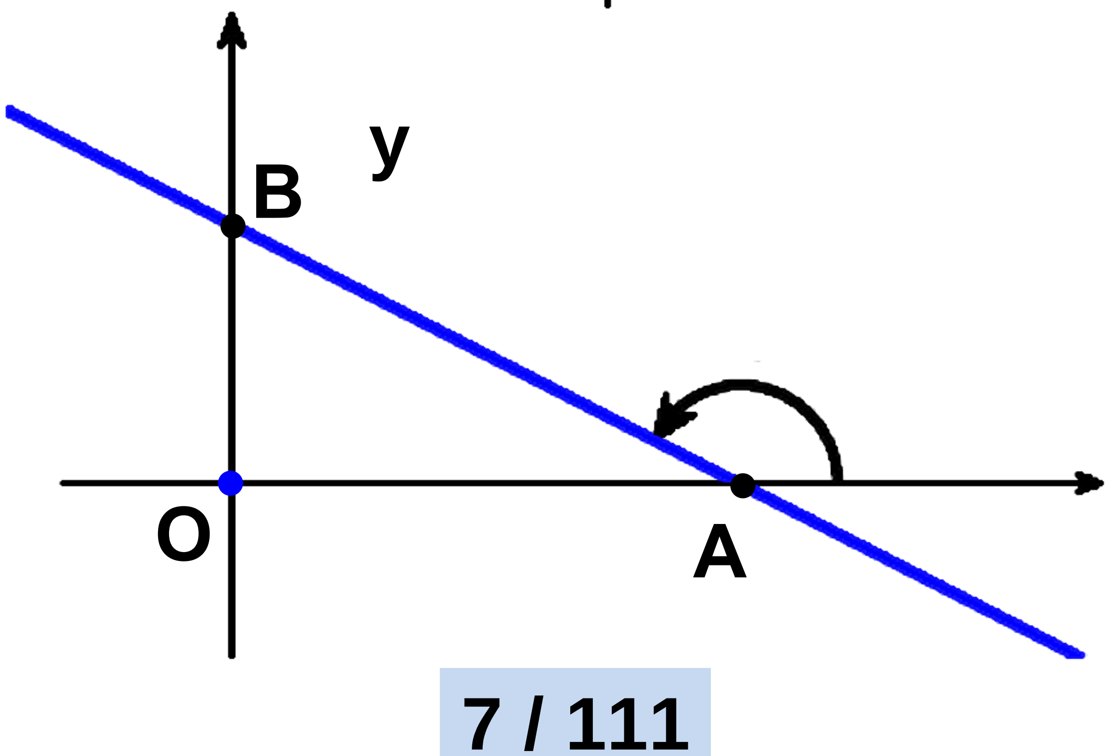
Τόμος 3ος

4.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = αx + β$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A.





Τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax , όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη θετική φορά[1] μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε, τη λέμε γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x'x . Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα x 'x ή συμπίπτει με αυτόν, τότε λέμε ότι η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα x 'x γωνία ω = 0°. Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει

$$0° \leq ω \leq 180°.$$

Ως συντελεστή διεύθυνσης ή ως κλίση μιας ευθείας ε ορίζουμε την

---

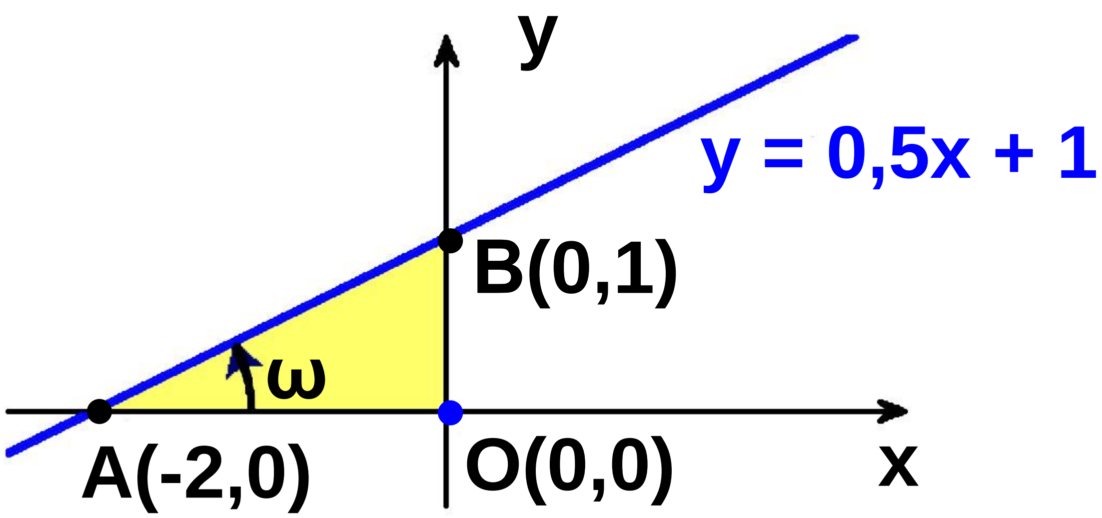
[1] Ως θετική φορά περιστροφής εννοούμε τη φορά κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί ο ημιάξονας Ox για να συμπέσει με τον ημιάξονα Oy, αφού προηγουμένως διαγράψει γωνία 90^0

εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x'x. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε συμβολίζεται συνήθως με $λ_ε$ ή απλά με λ. Είναι φανερό ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι θετικός, αν η γωνία ω είναι οξεία, αρνητικός, αν η γωνία ω είναι αμβλεία και μηδέν, αν η γωνία ω είναι μηδέν. Στην περίπτωση που η γωνία ω είναι ίση με 90°, δηλαδή όταν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα x'x, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ε.

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx + β$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 0{,}5x + 1$. Όπως πρακτικά διαπιστώσαμε στο Γυμνάσιο, η γραφική παράσταση της f είναι

ευθεία γραμμή με εξίσωση
$y = 0,5x + 1$ (Σχήμα).



Η ευθεία αυτή:

✓ Τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A(-2,0), αφού για $y = 0$ βρίσκουμε $x = -2$, και τον άξονα y'y στο σημείο B(0,1), αφού για $x = 0$ βρίσκουμε $y = 1$ και

✓ Έχει κλίση:

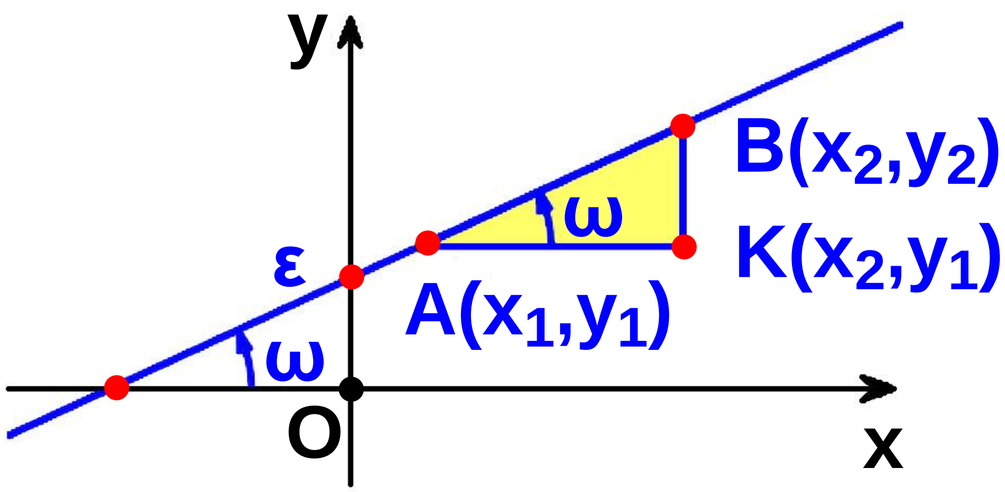
$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \frac{(OB)}{(OA)} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η κλίση λ της ευθείας $y = 0,5x + 1$ είναι ίση με το συντελεστή του x.

Γενικά, όπως θα αποδείξουμε στην Β' Λυκείου, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx + β$ είναι μία ευθεία, με εξίσωση $y = αx + β$, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Β(0,β) και έχει κλίση $λ = α$.
Είναι φανερό ότι:

- **αν $α > 0$, τότε $0^\circ < ω < 90^\circ$**
- **αν $α < 0$, τότε $90^\circ < ω < 180^\circ$**
- **αν $α = 0$, τότε $ω = 0^\circ$.**

Στην περίπτωση που είναι $α = 0$, η συνάρτηση παίρνει την μορφή $f(x) = β$ και λέγεται σταθερή συνάρτηση, διότι η τιμή της είναι η ίδια για κάθε $x \in R$.
Ας θεωρήσουμε τώρα δύο τυχαία σημεία $Α(x_1,y_1)$ και $Β(x_2,y_2)$ της ευθείας $y = α \cdot x + β$.



Τότε θα ισχύει:

$y_1 = αx + β$ **και** $y_2 = αx_2 + β$,

οπότε θα έχουμε:

$y_2 - y_1 = (αx_2 + β) - (αx + β) =$

$= α(x_2 - x_1)$.

Επομένως θα είναι:

$$\boxed{α = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

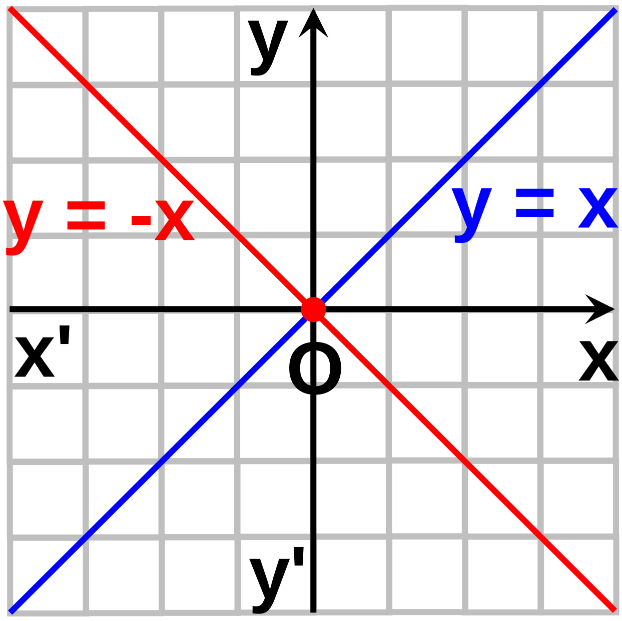
Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(-1,3) και Β(3,6) έχει κλίση $α = \dfrac{6 - 3}{3 - (-1)} = 0{,}75$.

Επομένως, η ευθεία αυτή σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ω με εφω = 0,75, οπότε θα είναι ω = 36,87°.

Η συνάρτηση $f(x) = αx$

Αν β = 0, τότε η f παίρνει τη μορφή $f(x) = αx$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία y = αx και περνάει από την αρχή των αξόνων. Ειδικότερα:

✓ Για α = 1 έχουμε την ευθεία y = x . Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα x'x, ισχύει εφω = α = 1, δηλαδή ω = 45°. Επομένως η ευθεία y = x είναι η διχοτόμος των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y$ των αξόνων.



✓ Για α = -1 έχουμε την ευθεία y = -x . Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα x'x, ισχύει εφω = α = -1, δηλαδή ω = 135^{o}. Επομένως η ευθεία y = -x είναι η διχοτόμος των γωνιών $y\hat{O}x'$ και $y\hat{O}x$ των αξόνων.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

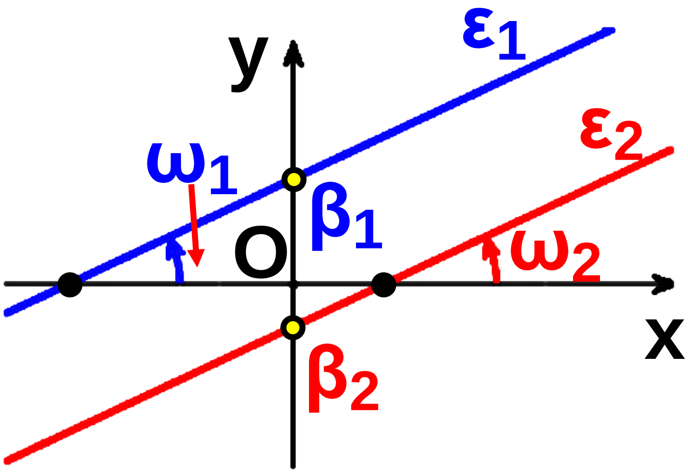
Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ με εξισώσεις $y = α_1x + β_1$ και $y = α_2x + β_2$ αντιστοίχως και ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα x'x γωνίες $ω_1$ και $ω_2$ αντιστοίχως.

• Αν $α_1 = α_2$, τότε $εφω_1 = εφω_2$, οπότε $ω_1 = ω_2$ και άρα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Ειδικότερα :

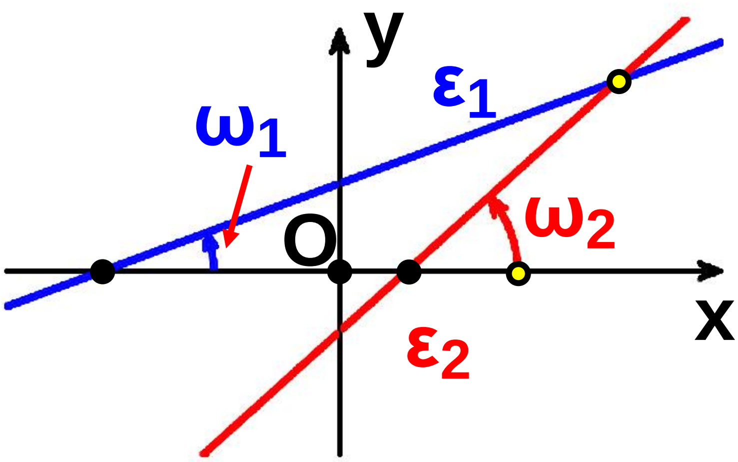
✓ Αν $α_1 = α_2$ και $β_1 \neq β_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες (Σχ. α'), ενώ

✓ Αν $α_1 = α_2$ και $β_1 = β_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

• Αν $α_1 \neq α_2$, τότε $εφω_1 \neq εφω_2$, οπότε $ω_1 \neq ω_2$ και άρα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται. (Σχ. β')



Σχήμα α



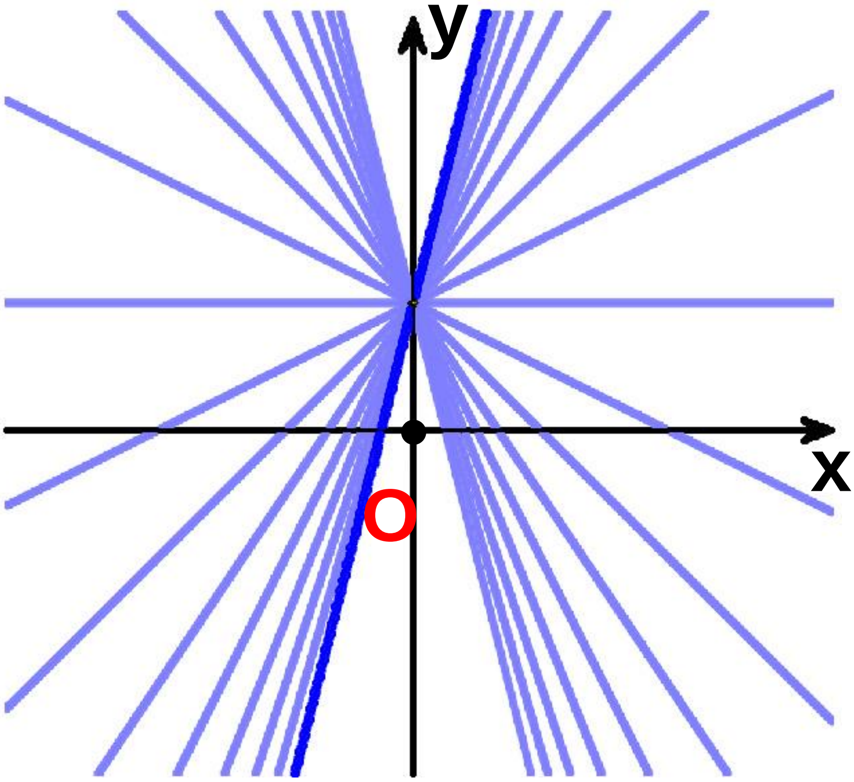
Σχήμα β

Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεράσματα:

- **Οι ευθείες της μορφής $y = αx + 1$, με $α \in R$, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: $y = x + 1$, $y = - x + 1$,**

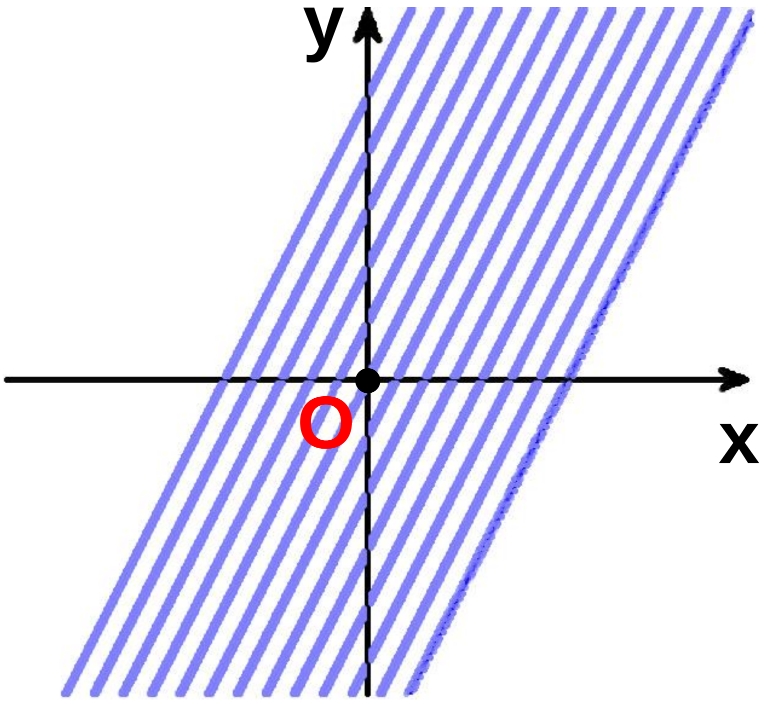
y = 2x + 1 κτλ., διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο, το σημείο 1 του άξονα y' y

Γενικά, οι ευθείες της μορφής y = αx + β, όπου β σταθερό και α μεταβλητό διέρχονται όλες από το σημείο β του άξονα y'y.



- **Οι ευθείες της μορφής y = 2x + β , β∈R, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: y = 2x, y = 2x - 1, y = 2x + 3 κτλ., είναι παράλληλες μεταξύ τους, αφού έχουν όλες κλίση α = 2**

Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, όπου α σταθερό και β μεταβλητό, είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους.



Η συνάρτηση $f(x) = |x|$

Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

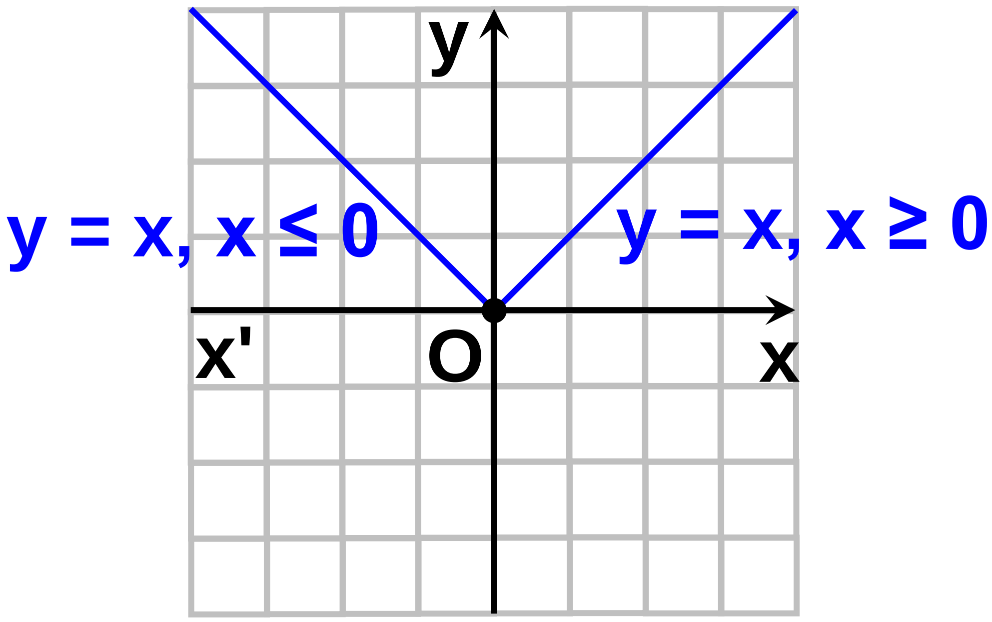
$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ αποτελείται από τις δύο ημιευθείες:

✓ $y = -x$, με $x \leq 0$ και

✓ $y = x$, με $x \leq 0$

που διχοτομούν τις γωνίες $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ αντιστοίχως.



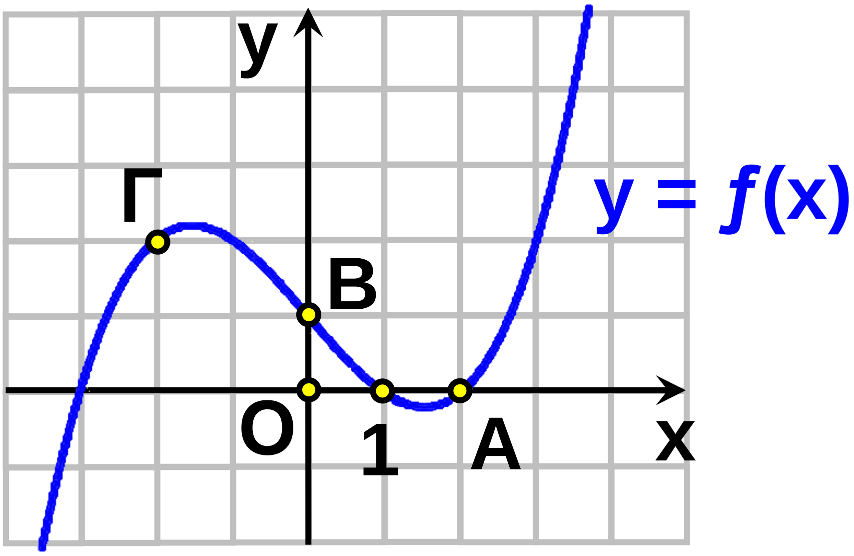
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας

συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το R.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ευθεία αυτή διέρχεται και από το σημείο Γ.

ii) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) > -0{,}5 \cdot x + 1$.



ΛΥΣΗ

i) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία Α (2,0) και Β (0,1) θα ισχύει:

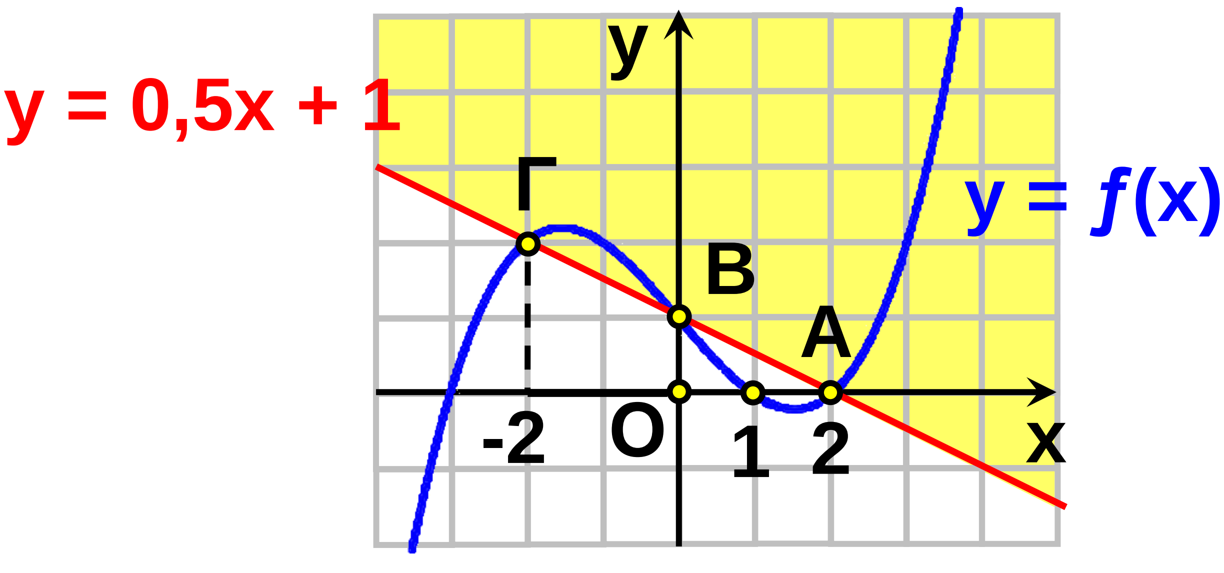
0 = α • 2 + β και 1 = α • 0 + β, οπότε θα έχουμε:

α = -0,5 και β = 1

Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι:

y = -0,5 • x + 1.

Για να δείξουμε τώρα ότι το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ, αρκεί να δείξουμε ότι το ζεύγος (-2,2) των συντεταγμένων του επαληθεύει την εξίσωση αυτής, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι 2 = -0,5 • (-2) + 1, που ισχύει.



ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > -0{,}5 \cdot x + 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής

παράστασης της *f* που βρίσκονται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = -0,5 \cdot x + 1$, δηλαδή πάνω από την ευθεία ΑΒ. Επομένως, η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (-2,0) \cup (2, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x' x η ευθεία:

i) $y = x + 2$ ii) $y = \sqrt{3}x - 1$

iii) $y = -x + 1$ iv) $y = -\sqrt{3}x + 2$.

2. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i) Α(1,2) και Β(2,3)

ii) Α(1,2) και Β(2,1)

iii) Α(2,1) και Β(-1,1)

iv) Α(1,3) και Β(2,1).

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

i) Έχει κλίση $α = -1$ και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Β(0,2).

ii) Σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $ω = 45^\circ$ και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Β(0,1).

iii) Είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x - 3$ και διέρχεται από το σημείο Α (1,1).

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i) Α(1,2) και Β(2,3)

ii) Α(1,2) και Β(2,1)

iii) Α(2,1) και Β(-1,1)

iv) Α(1,3) και Β(2,1).

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας C σε

βαθμούς Celsius και της θερμοκρασίας F σε βαθμούς Fahrenheit είναι η

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Γνωρίζουμε ότι το νερό παγώνει σε 0^oC ή 32^oF και βράζει σε 100^oC ή 212^oF.

Υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον ίδιο αριθμό;

6. **Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:**

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν} \quad x < 0 \\ 2, & \text{αν} \quad 0 \leq x < 1 \\ x + 1, & \text{αν} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

7. **Στο παρακάτω σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* που είναι ορισμένη σε όλο το R και η ευθεία y = x.**

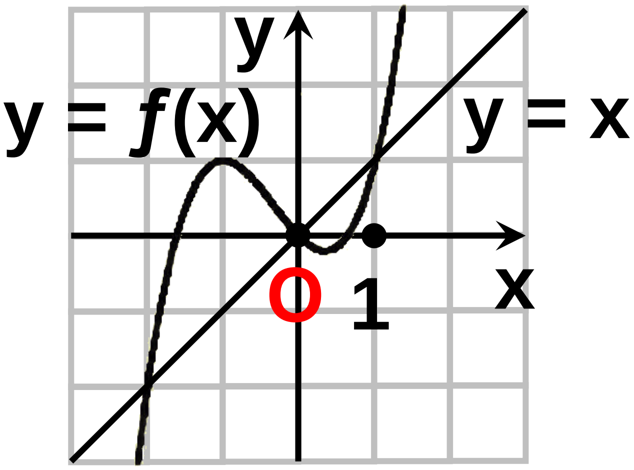
Να λύσετε γραφικά:

i) Τις εξισώσεις:

$f(x) = 1$ και $f(x) = x$.

ii) Τις ανισώσεις:

$f(x) < 1$ και $f(x) \geq x$.



8. i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x| \text{ και } g(x) = 1$$

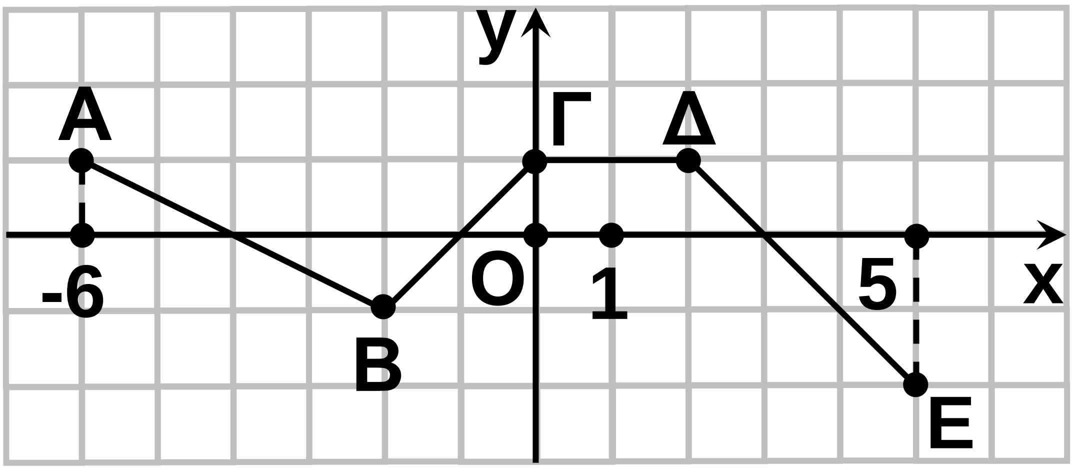
και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις:

$$|x| \leq 1 \text{ και } |x| > 1.$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕ του παρακάτω σχήματος είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* που είναι ορισμένη στο διάστημα [-6,5].



i) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης *f* σε κάθε ακέραιο $x \in [-6,5]$.

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x) = 0$, $f(x) = -1$ και $f(x) = 1$

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΔ και στη συνέχεια να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0,5 \cdot x$.

2. **Μια φωτεινή ακτίνα κινείται κατά μήκος της ευθείας $y = 1 - x$ και ανακλάται στον άξονα x'x. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.**

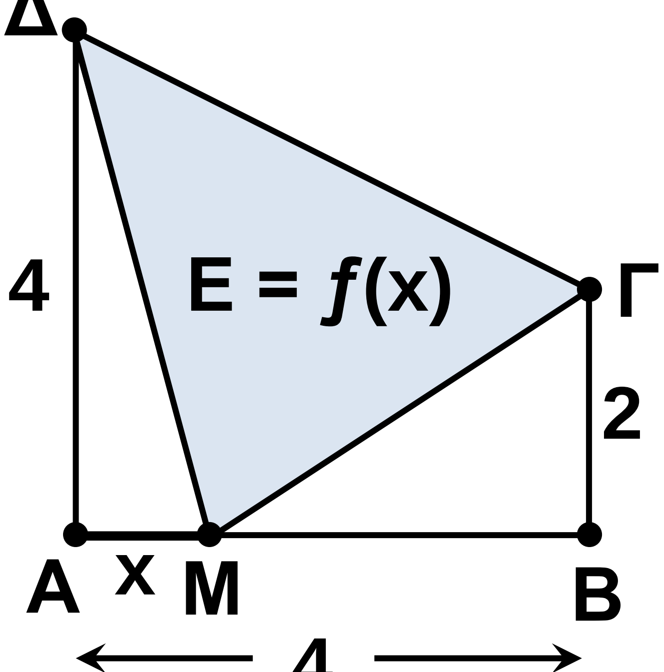
3. **Σε μια δεξαμενή υπάρχουν 600 λίτρα βενζίνης. Ένα βυτιοφόρο που περιέχει 2000 λίτρα βενζίνης αρχίζει να γεμίζει τη δεξαμενή. Αν η παροχή του βυτιοφόρου είναι 100 λίτρα το λεπτό και η δεξαμενή χωράει όλη τη βενζίνη του βυτιοφόρου:**

i) Να βρείτε τις συναρτήσεις που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t, την ποσότητα της βενζίνης:
α) στο βυτιοφόρο και
β) στη δεξαμενή.

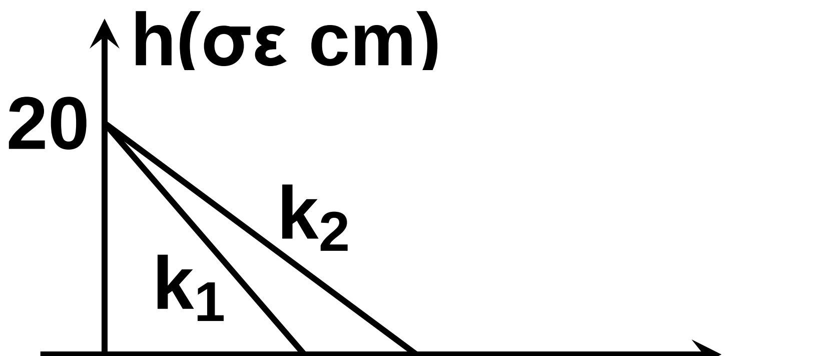
ii) Να παραστήσετε γραφικά τις παραπάνω συναρτήσεις και να

βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το βυτιοφόρο και η δεξαμενή έχουν την ίδια ποσότητα βενζίνης.

4. Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το Α προς το Β. Συμβολίζουμε με x το μήκος της διαδρομής ΑΜ του σημείου Μ και με $f(x)$ το εμβαδό του τριγώνου $\overset{\triangle}{\text{ΜΓΔ}}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης Ε = $f(x)$ και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.



5. Δύο κεριά K_1 και K_2, ύψους 20cm το καθένα, άρχισαν να καίγονται την ίδια χρονική στιγμή και το πρώτο κερί κάηκε σε 3 ώρες, ενώ το δεύτερο κάηκε σε 4 ώρες. Τα ύψη των κεριών K_1 και K_2, συναρτήσει του χρόνου t, κατά το χρονικό διάστημα που καθένα από αυτά καιγόταν, παριστάνονται με τα ευθύγραμμα τμήματα k_1 και k_2 του παρακάτω σχήματος.



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις $h = h_1(t)$ και $h = h_2(t)$ που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου

t, τα ύψη των κεριών K_1 και K_2 αντιστοίχως.

ii) Να βρείτε πότε το κερί K_2 είχε διπλάσιο ύψος από το κερί K_1.

iii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα και στη γενική περίπτωση που το αρχικό ύψος των κεριών ήταν ίσο με υ. Τι παρατηρείτε;

4.4 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

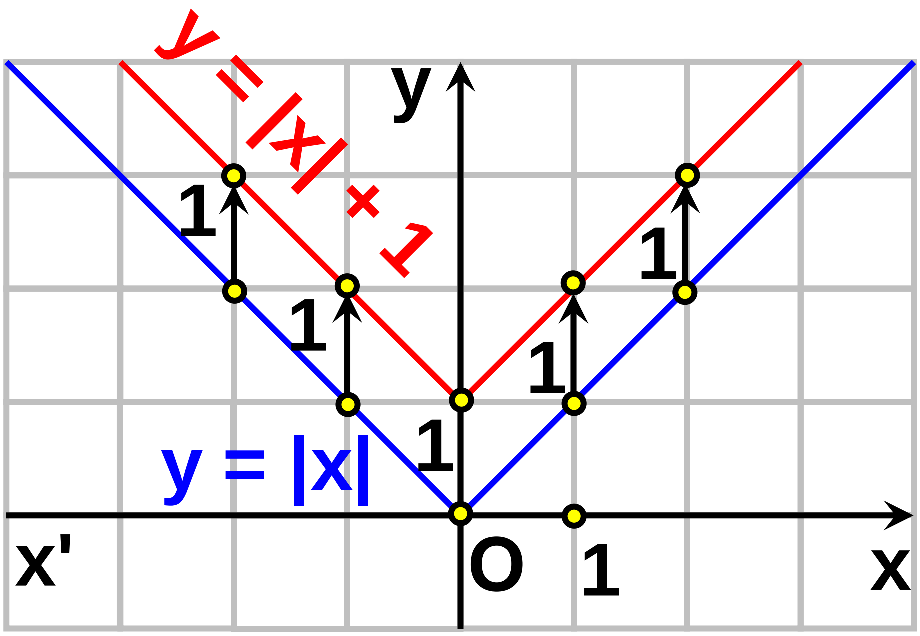
α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x| + 1$. Επειδή

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{αν} \quad x < 0 \\ x + 1, & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x| + 1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y = -x + 1$, με $x \leq 0$ και

✓ $y = x + 1$, με $x \geq 0$, που έχουν αρχή το σημείο 1 του άξονα y' y και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες, όπως είναι γνωστό, αποτελείται η γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$

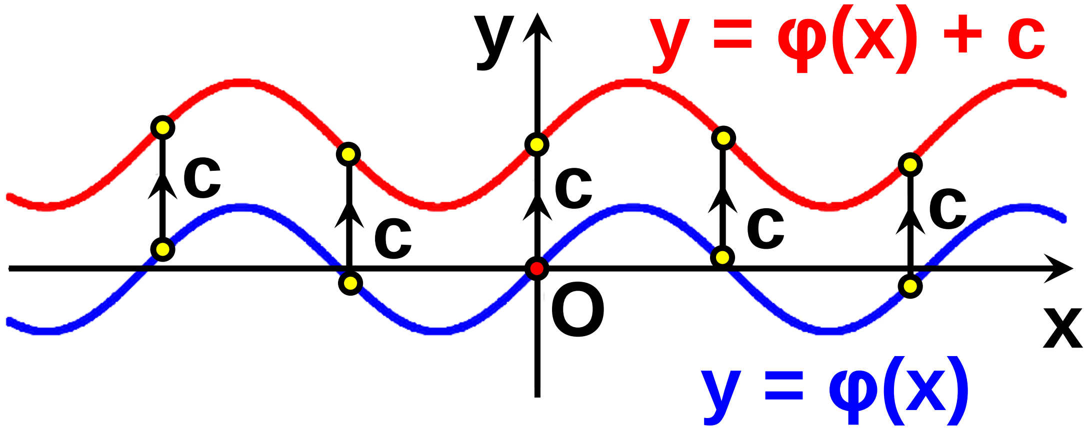
κατακόρυφα[1] και προς τα πάνω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x| + 1$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει:
$f(x) = \varphi(x) + 1$, για κάθε $x \in R$,
που σημαίνει ότι για κάθε $x \in R$ το $f(x)$ είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερο του $\varphi(x)$.

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:
$f(x) = \varphi(x) + c$, όπου $c > 0$,
προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω (Σχήμα α')

---

[1] Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα y'y



Σχήμα α'

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x| - 1$. Επειδή

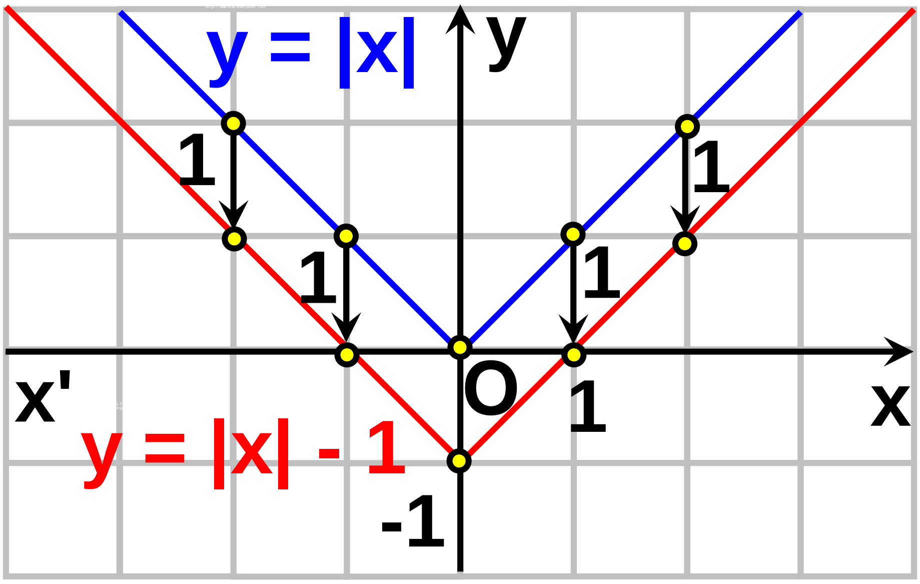
$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{αν } x < 0 \\ x - 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| -1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y = -x - 1$, με $x < 0$ και

✓ $y = x - 1$, με $x > 0$, που έχουν

αρχή το σημείο -1 του άξονα y' y και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της φ(x) = |x| (Σχήμα).

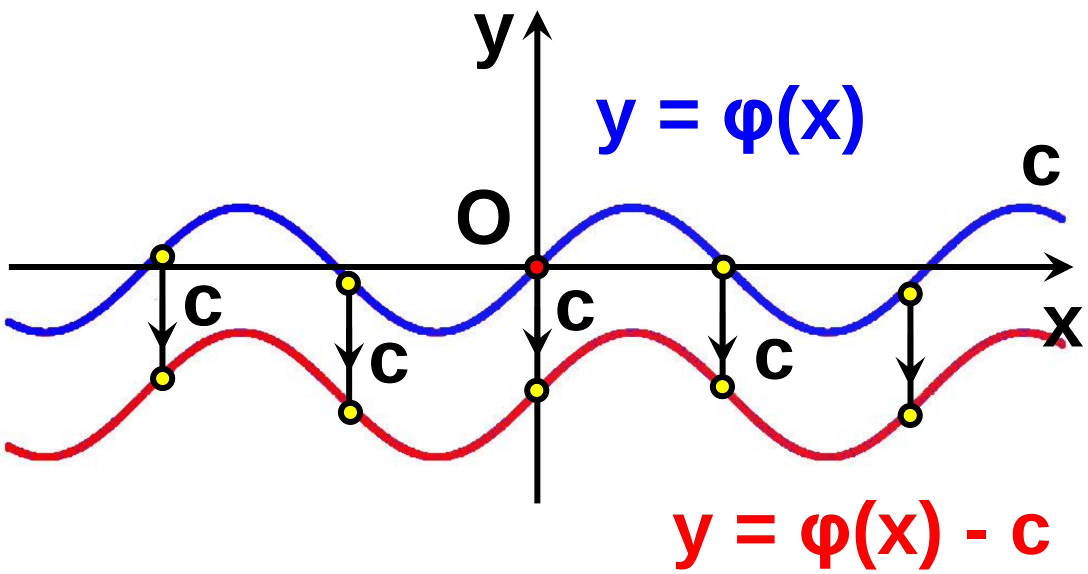


Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της φ(x) = |x| κατακόρυφα και προς τα κάτω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της *f*(x) = = |x| - 1. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει :

f(x) = φ(x) - 1, για κάθε x ∈ R,

που σημαίνει ότι για κάθε x∈R το *f*(x) είναι κατά 1 μονάδα μικρότερο του φ(x). Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης *f* , με:
$f(x) = φ(x) - c$, όπου $c > 0$,
προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα κάτω (Σχήμα β')



<u>Σχήμα β'</u>

Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x - 1|$. Επειδή

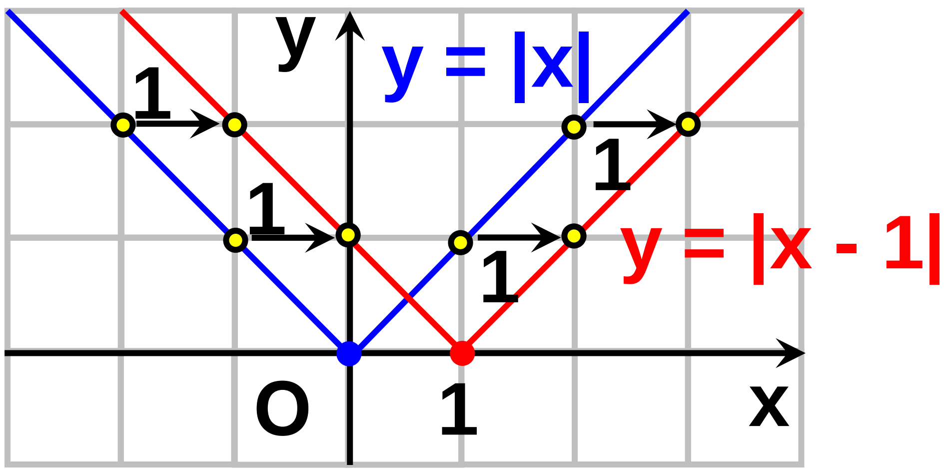
$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{αν } x < 1 \\ x - 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

η γραφική παράσταση της $f(x) = |x - 1|$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y = -x + 1$, με $x < 1$ και

✓ $y = x - 1$, με $x > 1$, που έχουν

αρχή το σημείο 1 του άξονα x'x και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$

οριζόντια[2] και προς τα δεξιά κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x - 1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει $f(x) = φ(x - 1)$, για κάθε $x \in R$, που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x) = |x - 1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $φ(x) = |x|$ στη θέση x - 1.

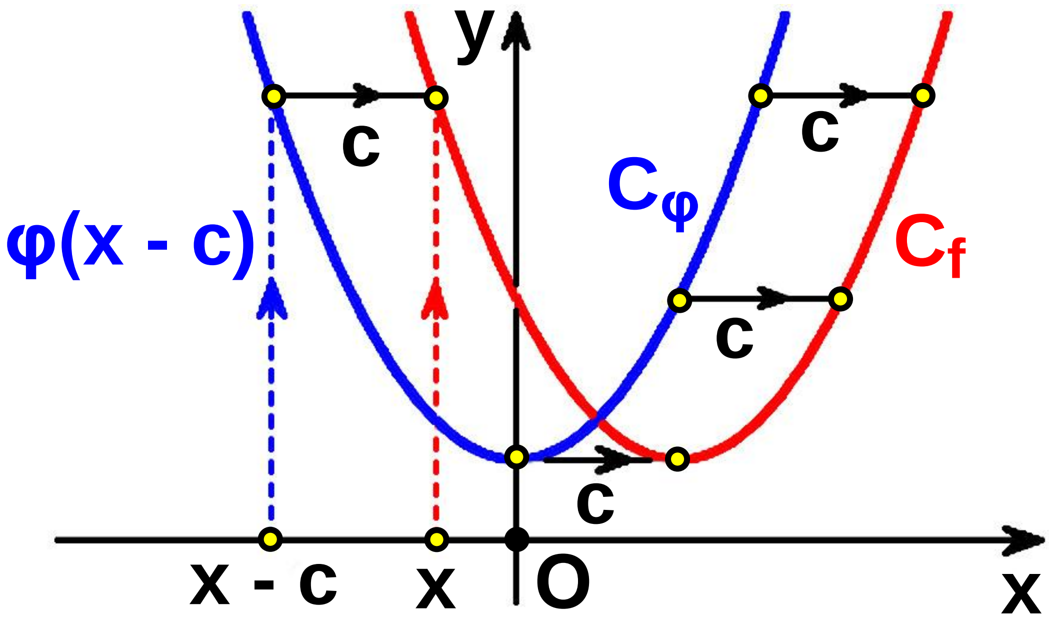
Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x) = φ(x - c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά (Σχήμα γ').

---

[2] Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα x'x .

Πράγματι επειδή $f(x) = φ(x - c)$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση x - c, που βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα γ').

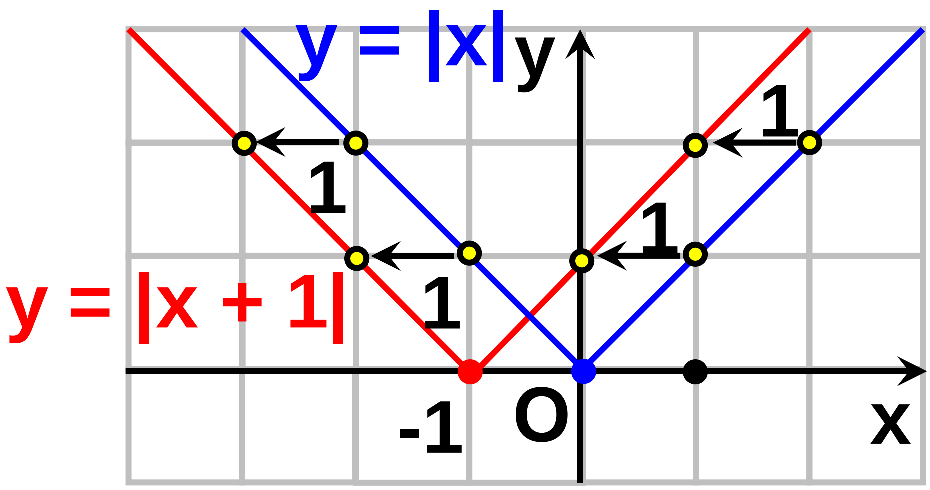


<u>Σχήμα γ'</u>

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x + 1|$. Επειδή

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & αν\ x < 1 \\ x + 1, & αν\ x \geq 1 \end{cases}$$

η γραφική παράσταση της
$f(x) = |x + 1|$, θα αποτελείται
από τις ημιευθείες
✓ $y = -x - 1$, με $x < -1$ και
✓ $y = x + 1$, με $x > -1$, που έχουν
αρχή το σημείο -1 του άξονα x' x και
είναι παράλληλες με τις διχοτόμους
των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις
οποίες αποτελείται η γραφική
παράσταση της $φ(x) = |x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη
γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$
οριζόντια και προς τα αριστερά
κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα

συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x + 1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει

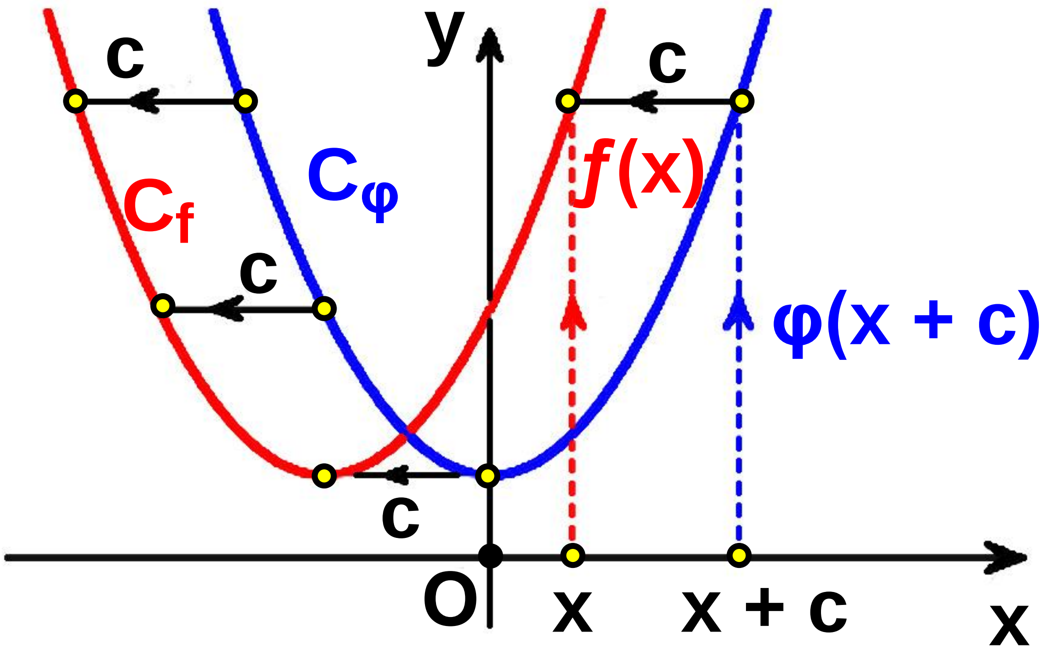
$f(x) = \varphi(x + 1)$, για κάθε $x \in R$,

που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x) = |x + 1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x) = |x|$ στη θέση $x + 1$. Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:
$f(x) = \varphi(x + c)$, όπου $c > 0$,
προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά (Σχήμα δ').

Πράγματι· επειδή $f(x) = \varphi(x + c)$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση $x + c$, που βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράστα-ση της f θα βρίσκεται c μονάδες

αριστερότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα δ').



Σχήμα δ'

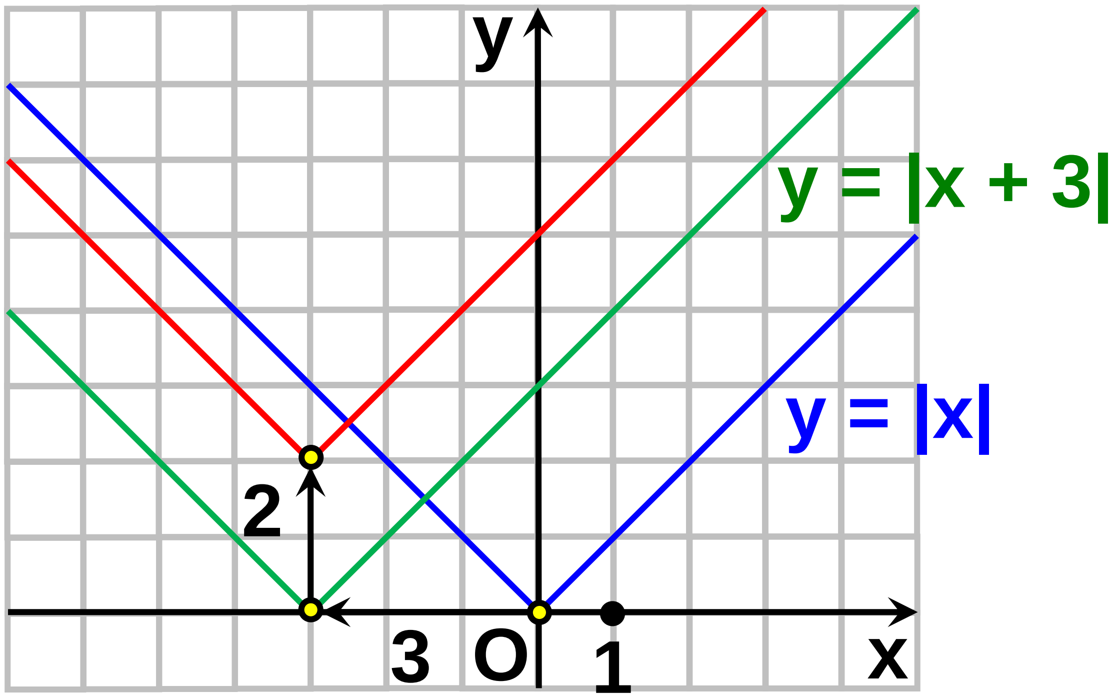
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να παραστεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = |x + 3| + 2$:

ΛΥΣΗ

Αρχικά χαράσσσουμε την $y = |x + 3|$, που όπως είδαμε προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$

κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = |x + 3| + 2$,που όπως είδαμε προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = |x + 3|$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.



Επομένως, η γραφική παράσταση της $f(x) = |x + 3| + 2$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της συνάρτησης $y = |x|$, μιας οριζόντιας

κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω (Σχήμα).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:
Με ανάλογο τρόπο, δουλεύουμε για να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις της μορφής:
$f(x) = φ(x \pm c) \pm d$, με $c, d > 0$
Δηλαδή, αξιοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$φ(x) = |x|$, $f(x) = |x| + 2$ και $g(x) = |x| - 2$.

2. Ομοίως για τις συναρτήσεις

$\varphi(x) = |x|$, $h(x) = |x + 2|$ και $g(x) = |x - 2|$.

3. Ομοίως για τις συναρτήσεις

$\varphi(x) = |x|$, $F(x) = |x + 2| + 1$ και $g(x) = |x - 2| - 1$.

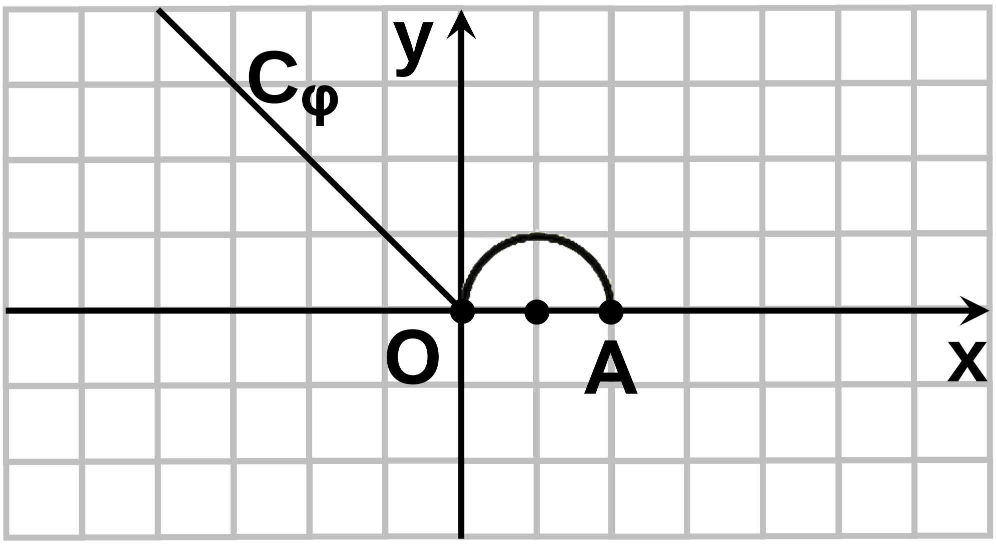
4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ που αποτελείται από την διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων και από το ημικύκλιο που ανήκει στο 1^{ο} τεταρτημόριο και έχει διάμετρο που ορίζουν τα σημεία Ο(0,0) και Α(2,0).

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = \varphi(x) + 2$ και $g(x) = \varphi(x) - 2$

ii) $h(x) = \varphi(x + 3)$ και $q(x) = \varphi(x - 3)$

iii) $F(x) = φ(x + 3) + 2$
και $G(x) = φ(x - 3) - 2$.



5. Δίνεται η συνάρτηση $φ(x) = 2x^2 - 1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης *f* της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ:

i) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

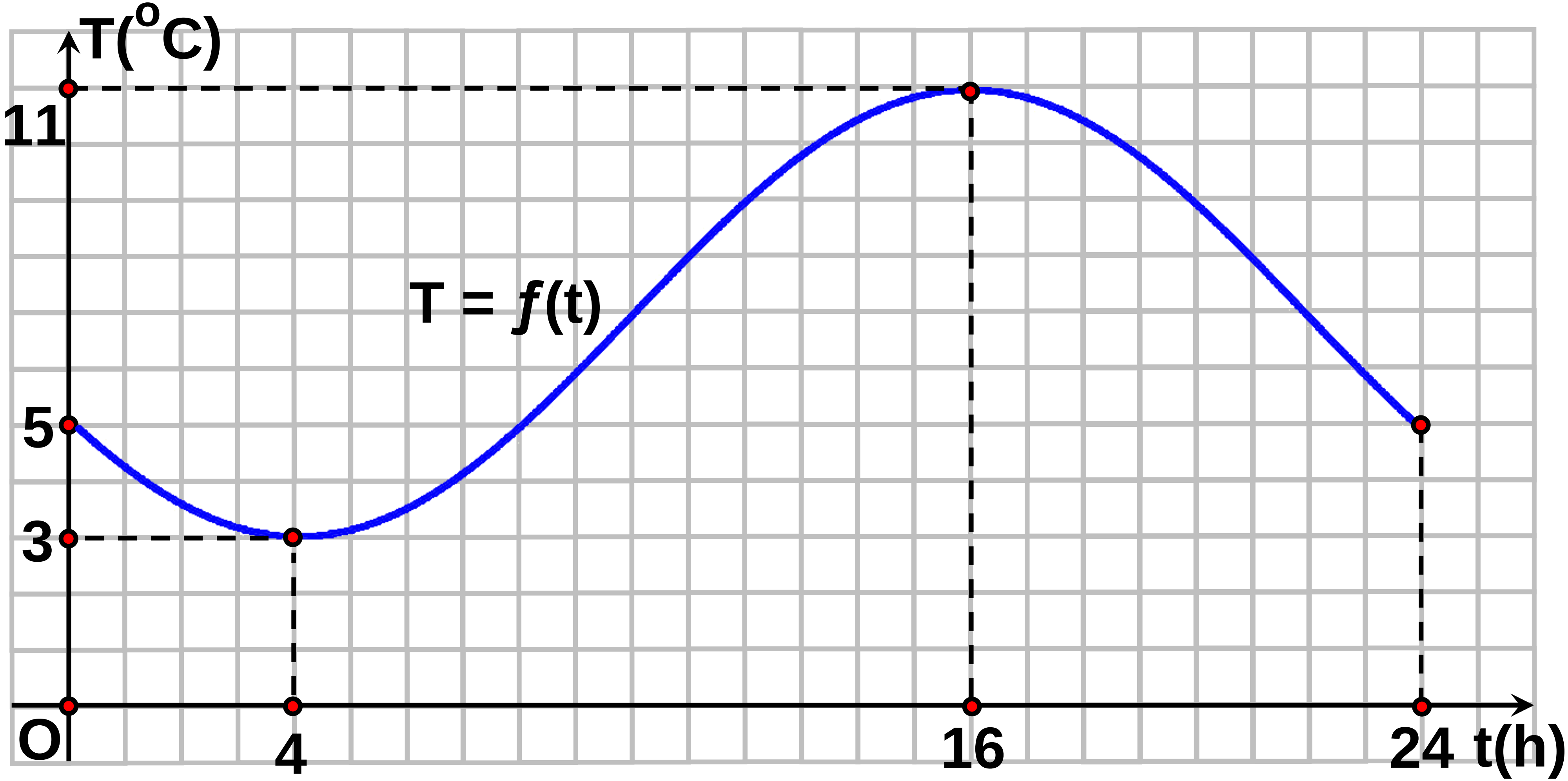
ii) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

iii) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 1 μονάδες προς τα πάνω.
iv) κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

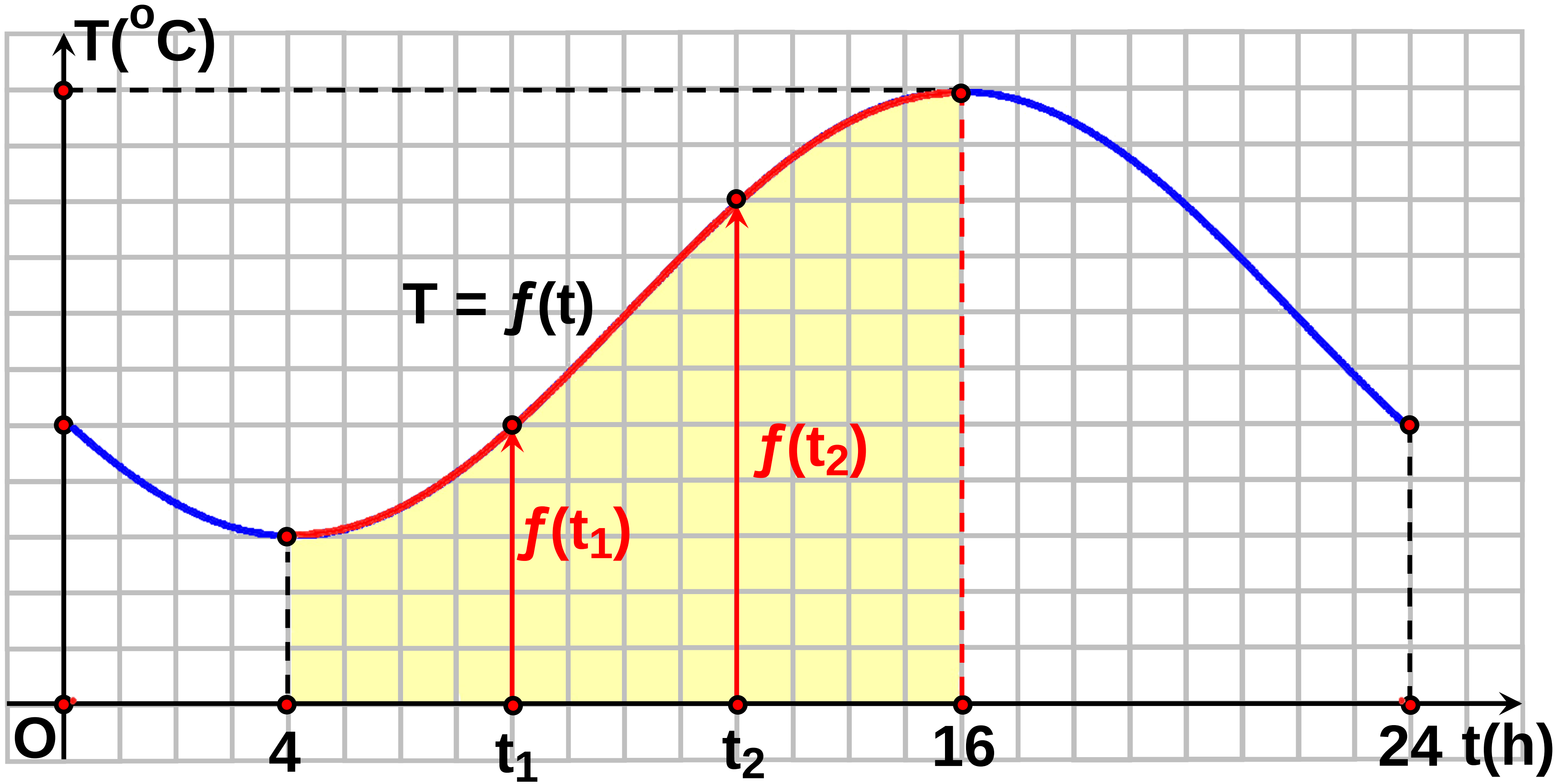
4.5 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μονοτονιά συνάρτησης

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$ που εκφράζει τη θερμοκρασία T ενός τόπου συναρτήσει του χρόνου t κατά το χρονικό διάστημα από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας ($t = 0$) μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας ($t = 24$).



α) Παρατηρούμε ότι στο διάστημα [4,16] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας ανέρχεται.


T(°C)
T = f(t)
f(t₁)
f(t₂)
O
4
t₁
t₂
16
24
t(h)

Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία αυξάνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε t_1, $t_2 \in [4,16]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) < f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [4,16].

Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

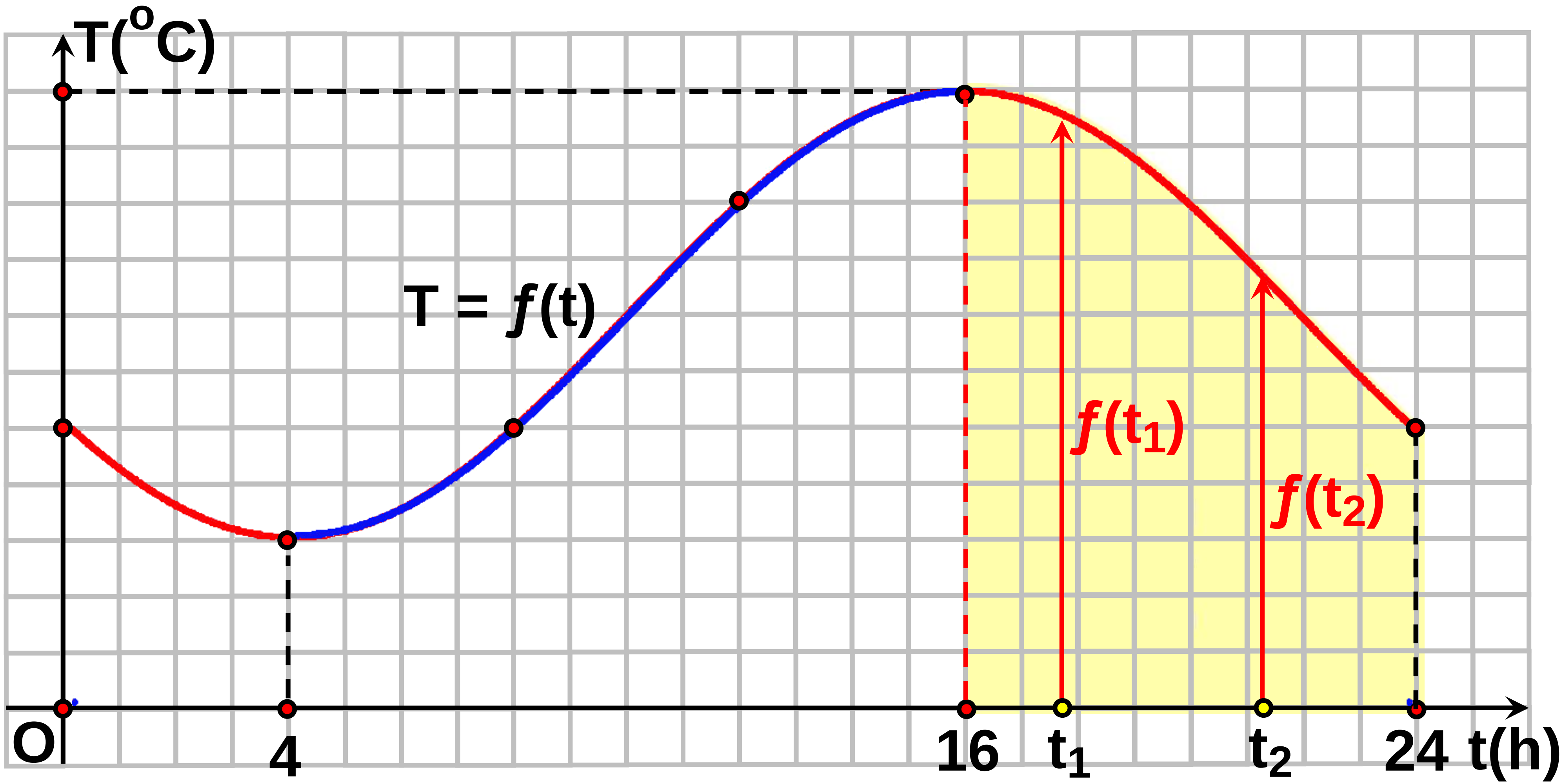
Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \uparrow$ Δ.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R . Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in$ R, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \\ &\Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Γενικά:
Η συνάρτηση $f(x) = x + β$, με α > 0 είναι γνησίως αύξουσα στο R.
β) Στο ίδιο σχήμα, παρατηρούμε επιπλέον ότι στο διάστημα [16,24] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας κατέρχεται.


T(°C)
T = f(t)
f(t1)
f(t2)
O
4
16
t1
t2
24
t(h)

Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία μειώνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [16,24]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) > f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [16,24].

Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(t_1) > f(t_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \downarrow \Delta$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -2x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Πράγματι· έστω $x_1, x_2 \in$ R, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \\ &\Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

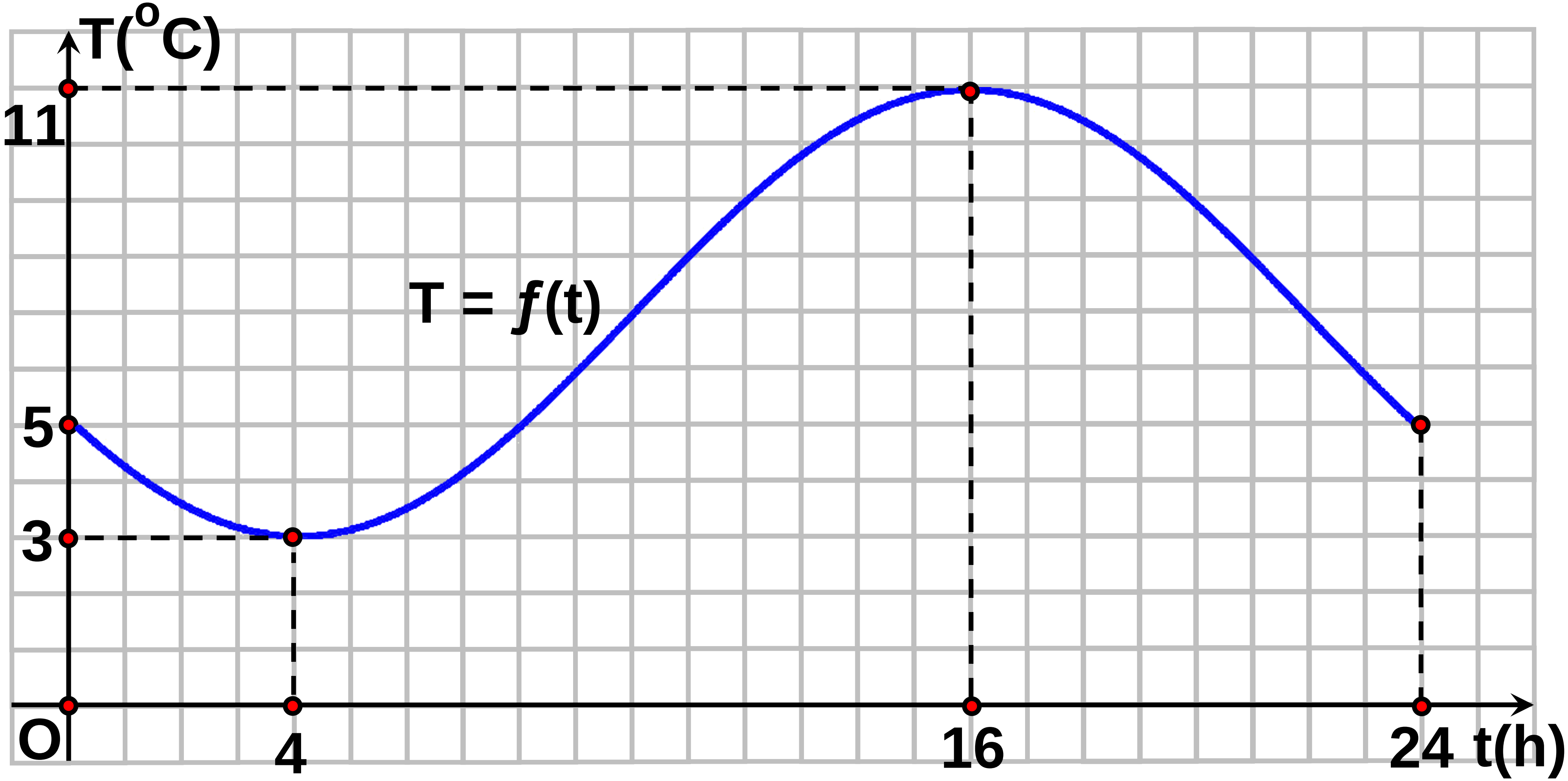
Γενικά:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται γνησίως μονότονη στο Δ.

Ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε και πάλι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$.


T(°C)
11
T = f(t)
5
3
O
4
16
24 t(h)

Παρατηρούμε ότι:

α) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει την ελάχιστη τιμή της, που είναι η $f(4) = 3$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$$f(t) \geq f(4) = 3 \text{ , για κάθε } t \in [0,24]$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 4$ ελάχιστο, το $f(4) = 3$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in$ Α (ολικό) ελάχιστο όταν:

$$f(x) > f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in$ Α λέγεται θέση ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο ή απλώς ελάχιστο της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με $\min f(x)$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 1$. Επειδή

$$x^4 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in R,$$

θα είναι

$$3x^4 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in R,$$

οπότε θα έχουμε

$$3x^4 + 1 \geq 1, \text{ για κάθε } x \in R.$$

Επομένως:

$$f(x) \geq f(0), \text{ για κάθε } x \in R$$

Άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$

β) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 16$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι η Τ(16) = = 11 βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$$f(t) \leq f(16) = 11, \text{ για κάθε } t \in [0,24]$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 16$ μέγιστο, το $f(16) = 11$.

Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν

$$f(x) \leq f(x_0)\text{ , για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό μέγιστο ή απλώς μέγιστο της f και το συμβολίζουμε με max $f(x)$. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 1$. Επειδή

$$x^4 \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in R,$$

θα είναι

$$-3x^4 \leq 0 , \quad \text{για κάθε } x \in R,$$

οπότε θα έχουμε

$$-3x^4 + 1 \leq 1, \quad \text{για κάθε } x \in R .$$

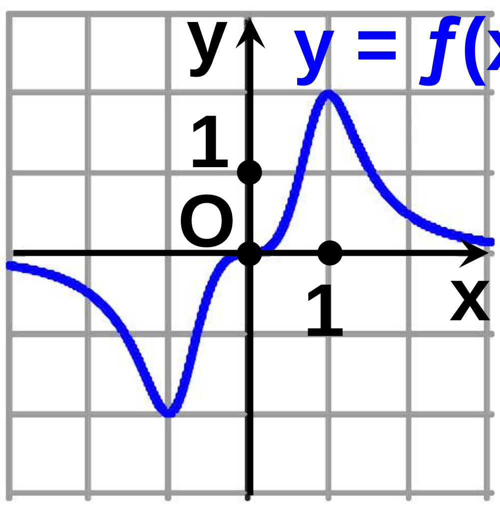
Επομένως:

$$f(x) \leq f(0), \quad \text{για κάθε } x \in R$$

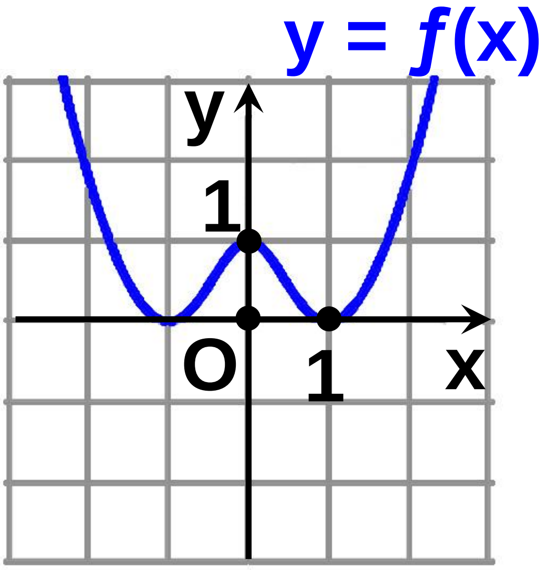
Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.
Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

ΣΧΟΛΙΟ:

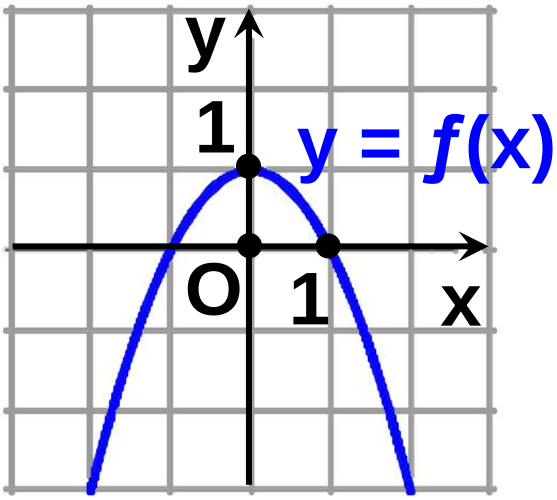
Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει και μέγιστο και ελάχιστο (Σχ. α) ή μόνο ελάχιστο (Σχ. β') ή μόνο μέγιστο (Σχ. γ') ή να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (Σχ. δ').



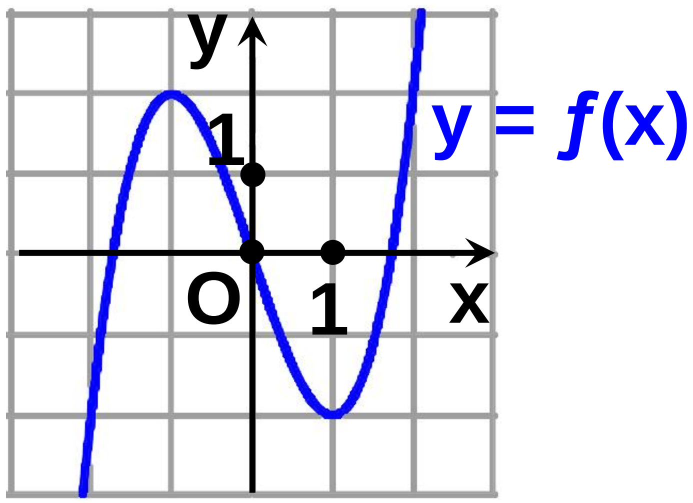
Σχήμα α



Σχήμα β'



Σχήμα γ'



Σχήμα δ'

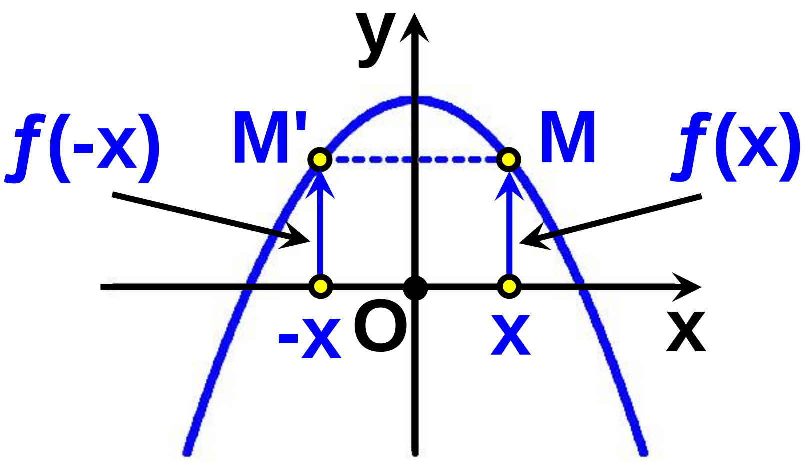
Άρτια συνάρτηση

α) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το R . Παρατηρούμε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς τον άξονα y'y ανήκει στην C_f .
Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου M(x,y) της C_f ως προς τον άξονα y'y είναι το σημείο M'(-x,y) και επειδή τα σημεία M(x,y)

και M'(-x,y) ανήκουν στην C_f , θα ισχύει y = f(x) και y = f(-x), οπότε θα έχουμε:

$$f(-x) = f(x)$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέμε λέγεται **άρτια**. Γενικά:



ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται άρτια, όταν για κάθε x ∈ A ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y 'y

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ είναι άρτια συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού όλο το R και για κάθε x∈R ισχύει:

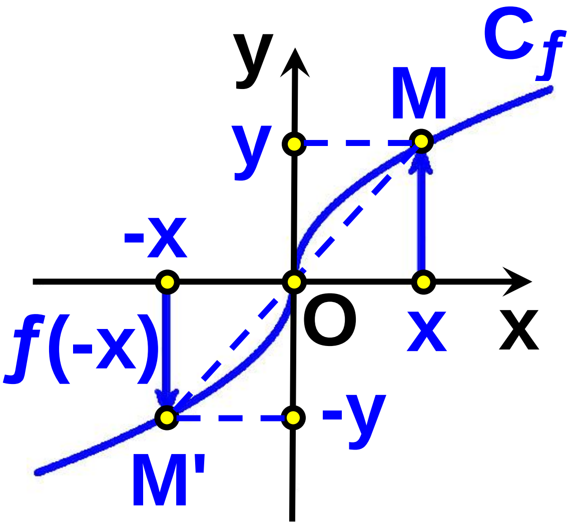
$$f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 1 =$$
$$= 2x^4 - x^2 + 1 = f(x)$$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y .

Περιττή συνάρτηση

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το R .

Παρατηρούμε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει στην C_f .



Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου Μ(x,y) της C_f ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο Μ'(-x, -y) και επειδή τα σημεία Μ(x,y) και Μ'(-x, -y) ανήκουν στην C_f , θα ισχύει $y = f(x)$ και $-y = f(-x)$, οπότε θα έχουμε:

$$f(-x\ ) = -f(x)$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται περιττή. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται περιττή, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x$ είναι περιττή συνάρτηση, διότι έχει πεδίο ορισμού όλο το R και για κάθε $x \in R$ ισχύει:
$f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -f(x)$
Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:
Ο όρος "άρτια" προέκυψε αρχικά από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ κτλ., που έχουν άρτιο εκθέτη, έχουν άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, είναι δηλαδή άρτιες συναρτήσεις, ενώ ο όρος "περιττή" προέρχεται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ κτλ., που έχουν

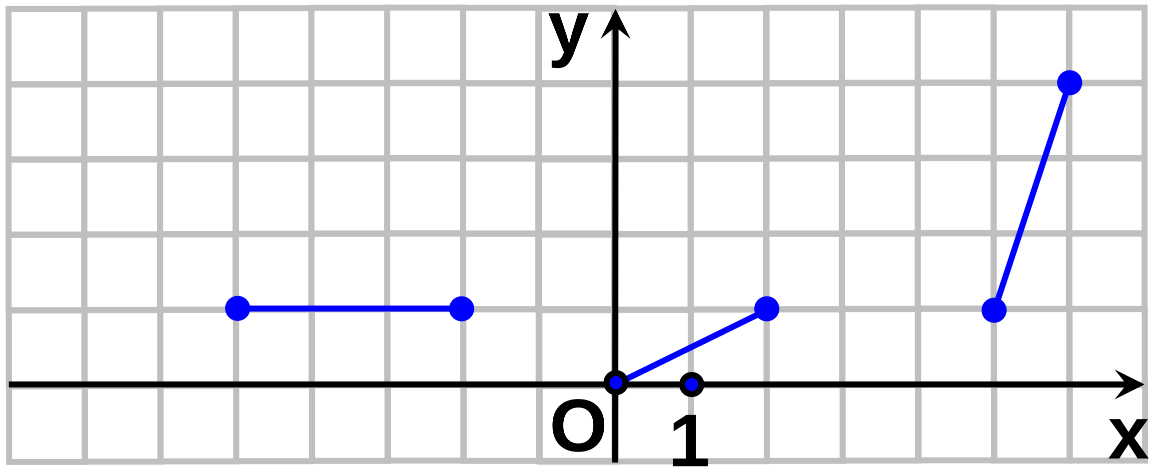
περιττό εκθέτη, έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, είναι δηλαδή περιττές συναρτήσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης *f* που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [-6,6].
Να χαραχθούν και τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* και με τη βοήθεια αυτής:

α) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση *f*:
i) είναι γνησίως αύξουσα,
ii) είναι γνησίως φθίνουσα
iii) είναι σταθερή.

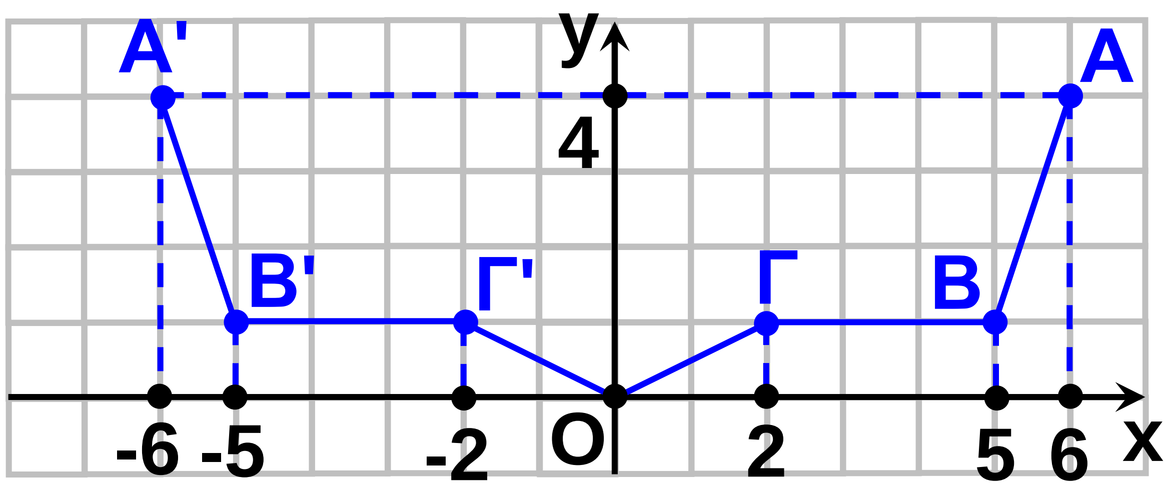
β) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της *f*, καθώς επίσης οι θέσεις των ακροτάτων αυτών.



ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση *f* είναι άρτια, η γραφική της παράσταση θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y. Επομένως, αν πάρουμε τα συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y των δοθέντων τμημάτων της γραφικής παράστασης της *f*, θα έχουμε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της *f*, που είναι η

πολυγωνική γραμμή Α΄Β΄Γ΄ΟΓΒΑ (Σχήμα).



Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτει ότι:

α) Η συνάρτηση f:

i) είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα [0,2] και [5,6],

ii) είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα [-2,0] και [-6,-5], τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το Ο των διαστημάτων [0,2] και [5,6] αντιστοίχως στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα [-5,-2] και [2,5] τα οποία είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς το Ο.

β) Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -6 και 6. Δηλαδή ισχύει:

$$\max f(x) = f(-6) = f(6) = 4$$

Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 0 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει την τιμή 0. Δηλαδή ισχύει:

$$\min f(x) = f(0) = 0.$$

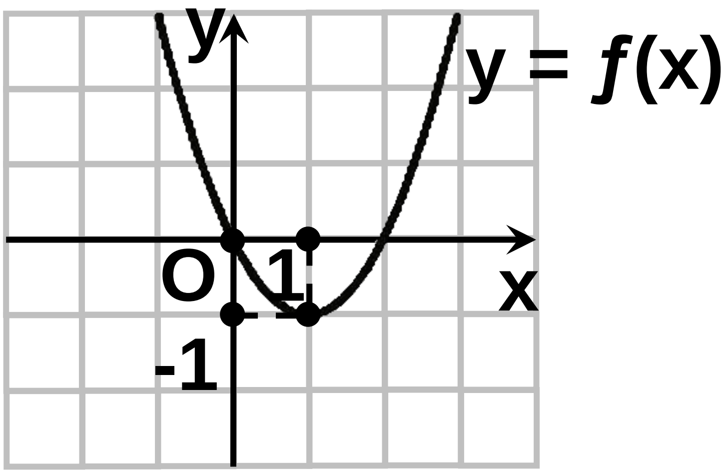
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

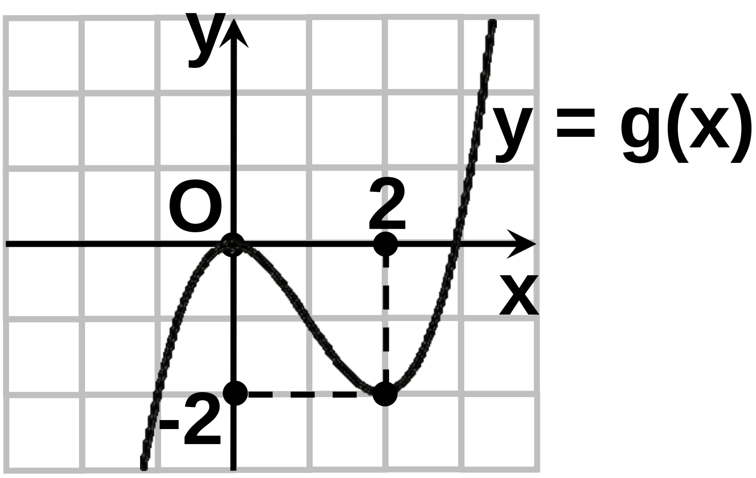
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

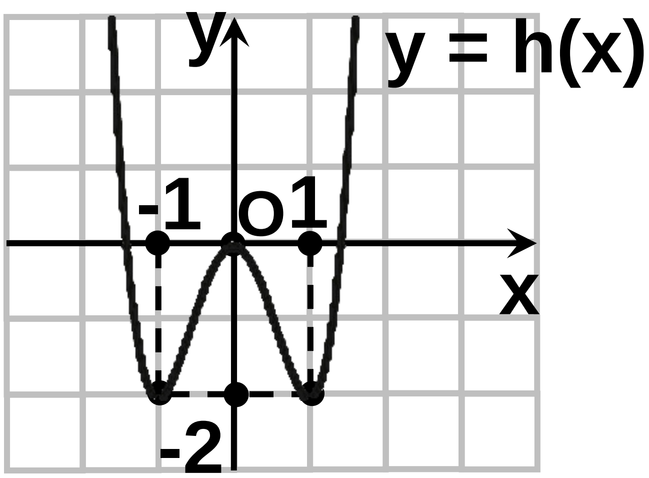
1) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι:

α) γνησίως αύξουσα και

β) γνησίως φθίνουσα.







2) Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων της προηγούμενης άσκησης, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

3) Να δείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για x = 3 .

ii) Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ παρουσιάζει μέγιστο για x = 1.

4) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

i) $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$

ii) $f_2(x) = 3|x| + 1$

iii) $f_3(x) = |x + 1|$

iv) $f_4(x) = x^3 - 3x^5$

v) $f_5(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$

vi) $f_6(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

5) Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f_1(x) = \dfrac{1}{|x|}$

ii) $f_2(x) = \sqrt{x - 2}$

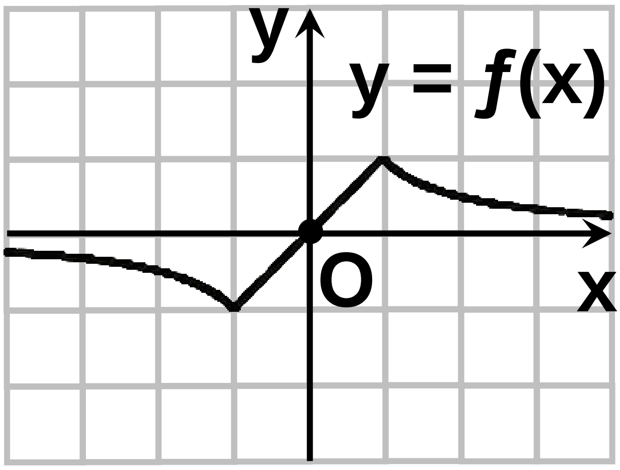
iii) $f_3(x) = |x - 1| - |x + 1|$

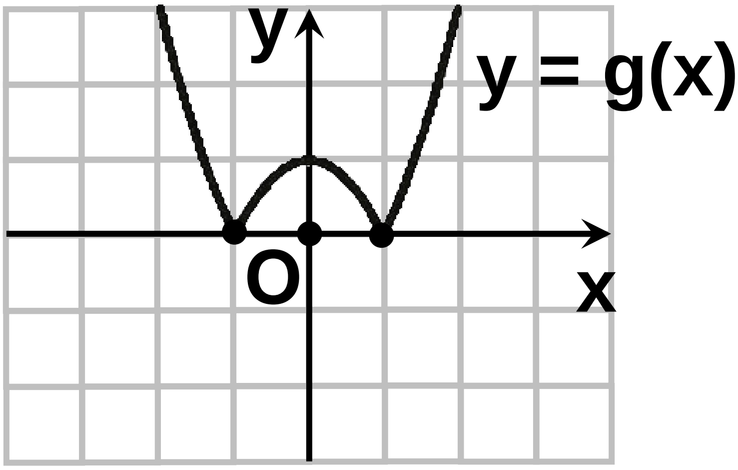
iv) $f_4(x) = \dfrac{x + \dfrac{1}{x}}{x^2 + 1}$

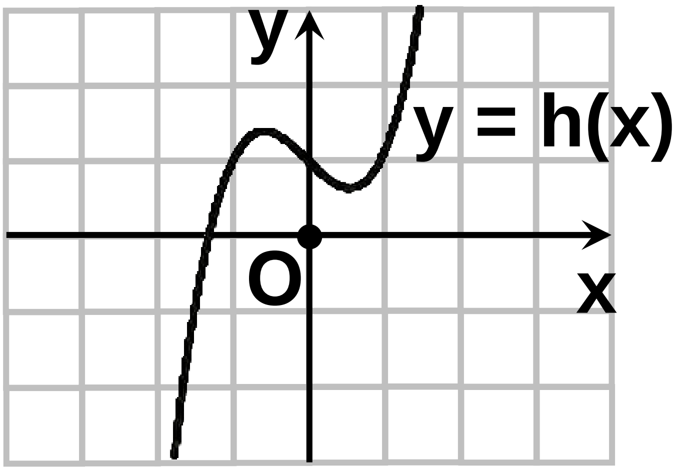
v) $f_5(x) = \sqrt{|x|}$

vi) $f_6(x) = \sqrt{1 - x^2}$

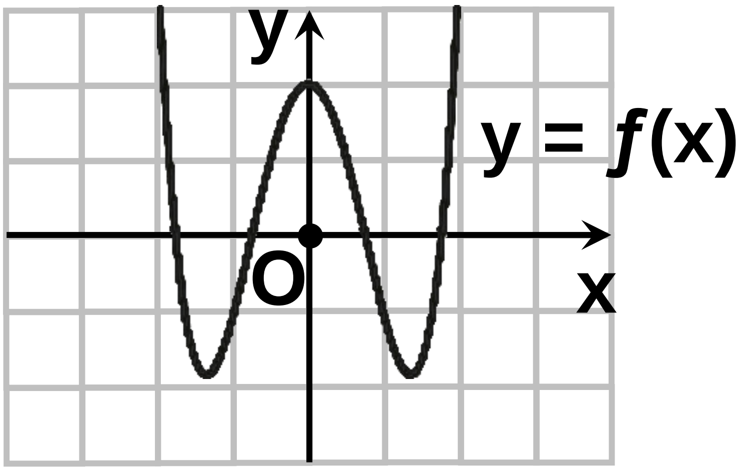
6) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.

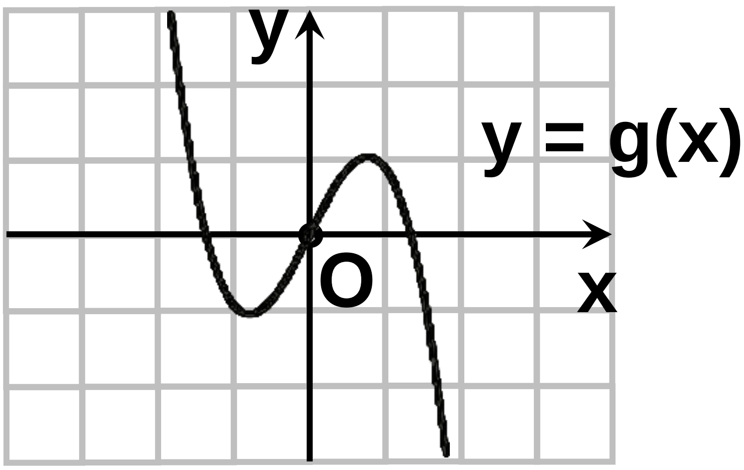


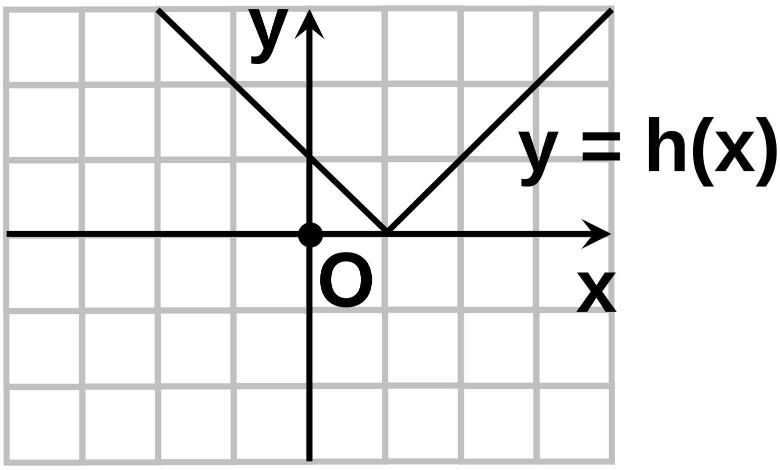




7) Ομοίως για τις παρακάτω γραμμές

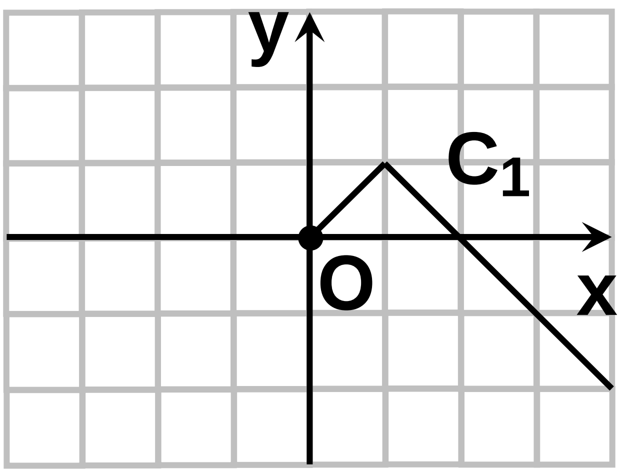


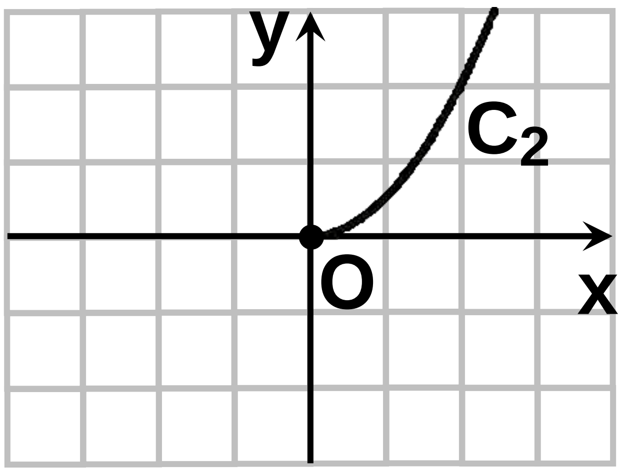


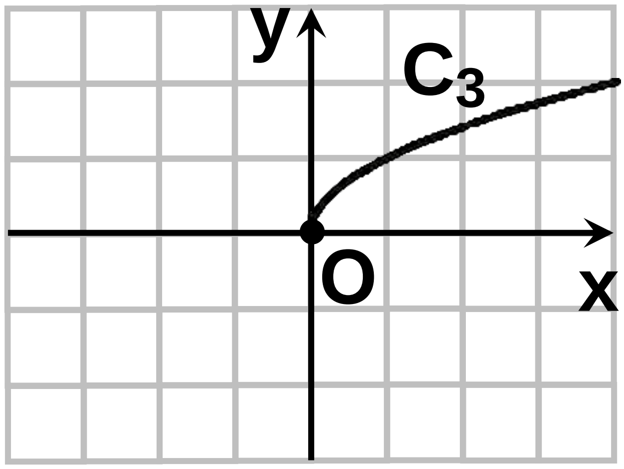


8) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις

α) Άρτιας συνάρτησης και
β) Περιττής συνάρτησης.







ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1.	Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α (1,2) και Β(1,3).	Α	Ψ
2.	Οι ευθείες $y = \alpha^2 x - 2$ και $y = -x + 1$ τέμνονται.	Α	Ψ
3.	Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα.	Α	Ψ

4.	**Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα.**	**Α**	**Ψ**
5.	**Υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία Α (1,2), Β(2,1) και Γ (3,3).**	**Α**	**Ψ**
6.	**Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε θα ισχύει $f(0) < 0$.**	**Α**	**Ψ**
7.	**Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α (1,2) και Β (2,5), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.**	**Α**	**Ψ**
8.	**Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι ίση με 1, τότε η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.**	**Α**	**Ψ**

9.	**Η συνάρτηση f:[-1,2]→R με $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια.**	**Α**	**Ψ**
10.	**Αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε θα έχει ρίζα και τον αριθμό -ρ.**	**Α**	**Ψ**
11.	**Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.**	**Α**	**Ψ**
12.	**Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η $-f$ είναι περιττή.**	**Α**	**Ψ**

II) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για την παρακάτω συνάρτηση f.

Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi(x) = 3x^4$ μιας

οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, έχει τύπο:

Α) $f(x) = 3(x - 1)^4 + 2$
Β) $f(x) = 3(x - 1)^4 - 2$,
Γ) $f(x) = 3(x + 1)^4 + 2$
Δ) $f(x) = 3(x + 1)^4 - 2$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η ιδέα της χρησιμοποίησης διατεταγμένων ζευγών για τα σημεία ενός επιπέδου και της περιγραφής καμπύλων με εξισώσεις, ανήκει στον Rene Descartes (1596 - 1650) και στον Pierre de Fermat (1601 - 1665).
Ο Descartes (Καρτέσιος) γεννήθηκε στη La Haye (σημερινή Ντερκατ) της Touraine και πέθανε στη

Στοκχόλμη. Σε ηλικία 10 χρόνων εγγράφηκε στο Βασιλικό Κολλέγιο της La Fleche, όπου δίδασκαν Ιησουίτες. Από εκείνη τη στιγμή αρχίζει και το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά. Στη ζωή του υπήρξε φιλόσοφος, αλλά ένα μεγάλο μέρος του χρόνου του το διέθετε για τα μαθηματικά.
Τα αποτελέσματα και οι μέθοδοί του, που δημοσίευσε το 1637 στο βιβλίο του Le Geometrie, δημιούργησαν ένα νέο κλάδο των μαθηματικών που αργότερα ονομάστηκε Αναλυτική Γεωμετρία. Ο Καρτέσιος διείδε τη δύναμη της Άλγεβρας για τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων και η σκέψη του αντιπροσώπευε μια ριζική απόκλιση από την μέχρι τότε επικρατούσα άποψη για τη Γεωμετρία. Ο όρος

«Καρτεσιανές συντεταγμένες», οφείλεται στο όνομά του.
Ο Fermat, που έζησε στην Toulouse της νότιας Γαλλίας, αν και ήταν νομικός στο επάγγελμα, υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 17ου αιώνα.
Τις ιδέες του για συντεταγμένες στη Γεωμετρία, τυποποίησε στις αρχές του 1629 και τις κυκλοφόρησε με αλληλογραφία, αλλά δεν δημοσιεύτηκαν πριν από το 1679. Ο Fermat συνέδεσε το όνομά του με τον ισχυρισμό:
«Για κάθε ν > 2 είναι αδύνατο να βρούμε θετικούς ακέραιους α, β, γ που να ικανοποιούν την σχέση $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} + \gamma^{\nu}$ » που είναι γνωστός ως το «τελευταίο θεώρημα του Fermat».
Τον ισχυρισμό του αυτόν έγραψε ο Fermat στο περιθώριο ενός βιβλίου του προσθέτοντας και τα εξής:

«Έχω βρει μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη την οποία το περιθώριο αυτό είναι πολύ στενό για να χωρέσει».
Ο ισχυρισμός αυτός του Fermat αποδείχτηκε αληθής το 1994 από τον Άγγλο μαθηματικό A. Wiles, αφού υπήρξε για 350 χρόνια ένα από τα διασημότερα άλυτα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών.

5 ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$f_1(x) = \alpha x^2$, $\quad f_2(x) = \alpha x^3$,

$f_3 = \dfrac{\alpha}{x}$ **και** $f_4(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται μελέτη συνάρτησης και περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

2. Προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.
3. Μελετούμε τη "συμπεριφορά" της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της ("οριακές τιμές" κτλ.).
4. Συντάσσουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης και, με τη βοήθεια αυτού και των προηγούμενων συμπερασμάτων, χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

ΣΧΟΛΙΟ

Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α είναι <u>άρτια</u>, τότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, ενώ αν είναι <u>περιττή</u>, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης αρκεί να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$ και να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο σύνολο αυτό. Στη συνέχεια θα πάρουμε το συμμετρικό της καμπύλης που χαράξαμε ως προς τον άξονα y'y αν η συνάρτηση είναι άρτια και ως προς την αρχή των αξόνων αν η συνάρτηση είναι περιττή και θα βγάλουμε τα σχετικά συμπεράσματα. Γι' αυτό, συνήθως, πριν προχωρήσουμε στα βήματα 2 έως 4, ελέγχουμε από την αρχή αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

5.1 ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \alpha x^2$

Η συνάρτηση $g(x) = x^2$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή, έχει πεδίο ορισμού όλο το R και είναι άρτια, διότι για κάθε $x \in R$ ισχύει :

$$g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της g έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y. Άρα, σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως, αρχικά θα μελετήσουμε και θα παραστήσουμε γραφικά την g στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Έχουμε λοιπόν:

• <u>Μονοτονία</u>: Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα

είναι $x_1^2 < x_2^2$, οπότε θα έχουμε $g(x_1) < g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $g(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

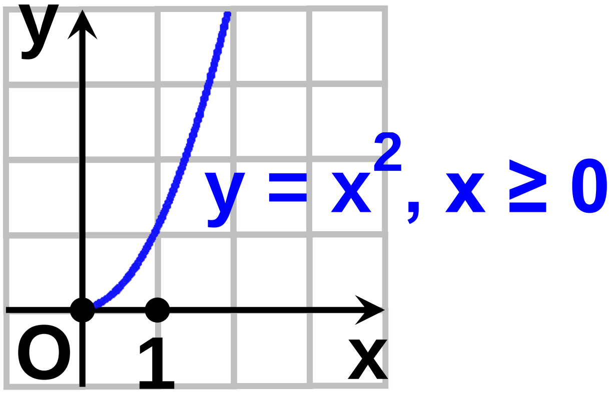
- **<u>Ακρότατα</u>: Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει:**

$g(x) = x^2 \geq 0 = g(0)$. Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο, το $g(0) = 0$.

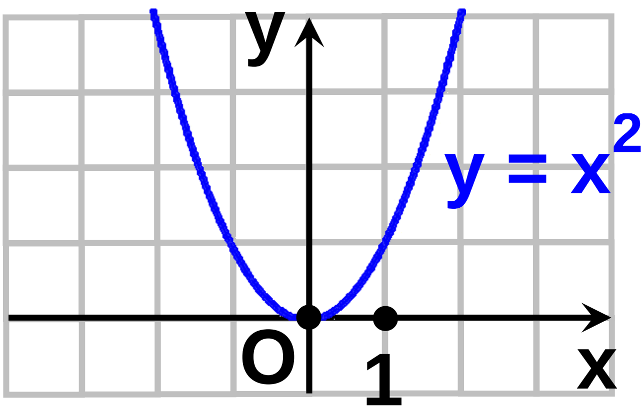
- **<u>Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x</u>: Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του x:**

x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	…	$\to +\infty$
$g(x) = x^2$	10^{20}	10^{40}	10^{100}	10^{200}	10^{2000}	…	$\to +\infty$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, ή όπως λέμε "τείνει στο +∞", το x^2 αυξάνεται και αυτό απεριόριστα και μάλιστα γρηγορότερα και άρα "τείνει στο +∞ ". Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της g προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x απομακρύνεται προς το +∞.



Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και παίρνοντας ένα πίνακα τιμών της g για μη αρνητικές τιμές του x, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, +\infty)$.



Αν τώρα πάρουμε το συμμετρικό της παραπάνω καμπύλης ως προς τον άξονα y'y, τότε θα έχουμε τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$

σε όλο το R , από την οποία συμπεραίνουμε ότι:

Η συνάρτηση $g(x) = x^2$:

- **Είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,0] και γνησίως αύξουσα στο [0, +∞)**
- **Παρουσιάζει ελάχιστο για x = 0, το $g(0) = 0$.**
- **Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x τείνει είτε στο -∞, είτε στο +∞.**

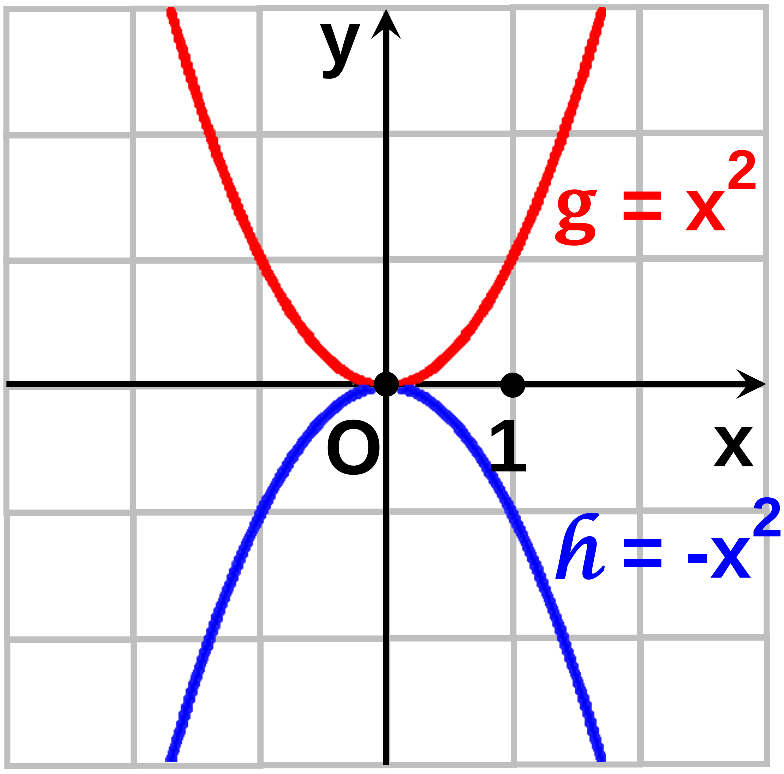
Η συνάρτηση $h(x) = -x^2$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $h(x) = -x^2$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει

$$h(x) = -g(x)$$

Άρα, όπως μάθαμε στην §4.2, η γραφική παράσταση της $h(x) = -x^2$

είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x) = x^2$ ως προς τον άξονα x'x.



Επομένως η συνάρτηση $h(x) = -x^2$:

• Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

• Παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$, το $h(0) = 0$

• Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, καθώς το x τείνει είτε στο $-\infty$ είτε στο $+\infty$.

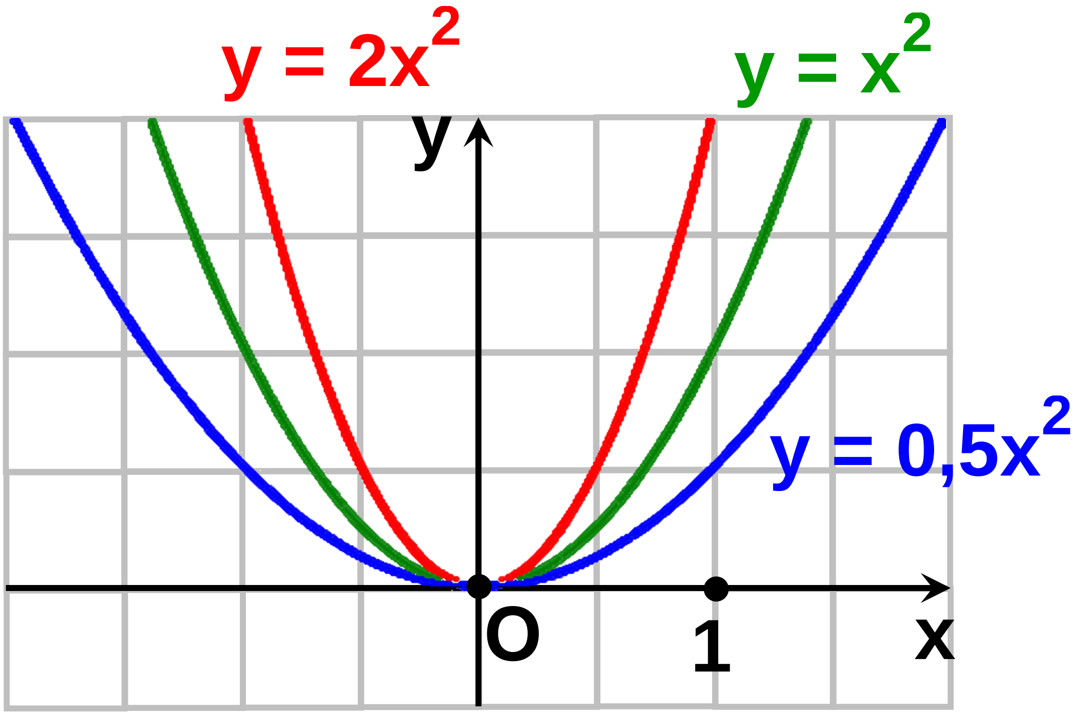
Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

• Αν $\alpha > 0$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞	0	+∞
$f(x) = \alpha x^2$ $\alpha > 0$	-∞ $\searrow$	0 min	$\nearrow$ +∞

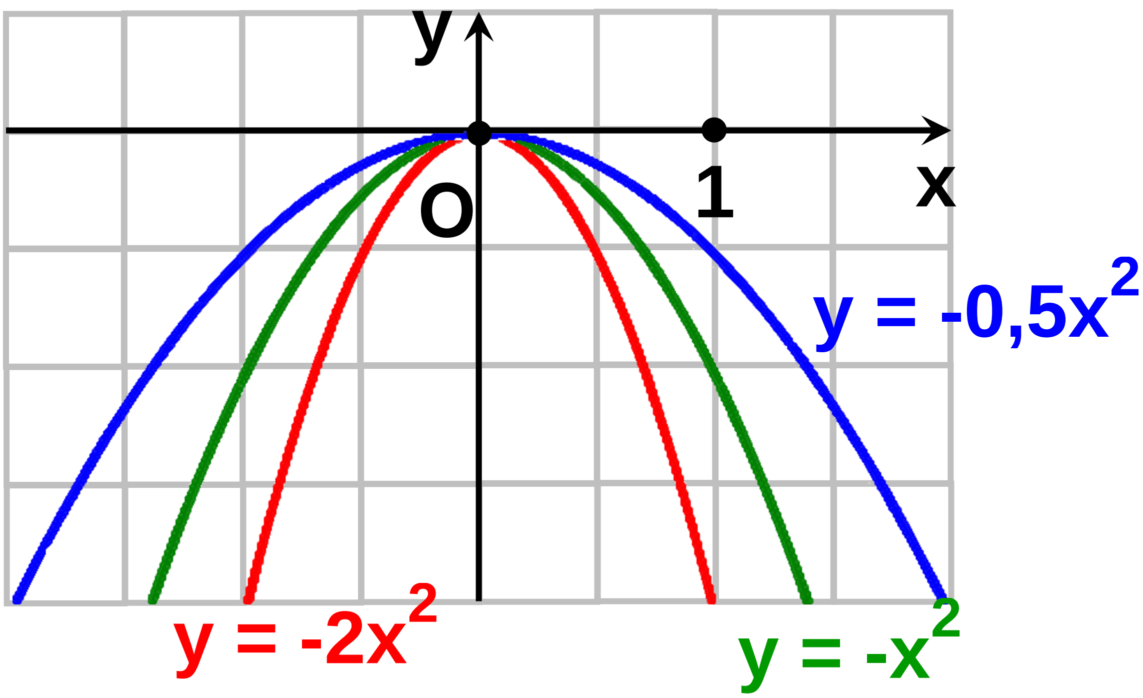
Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$ για $\alpha = 0,5$, $\alpha = 1$ και $\alpha = 2$.



• **Αν α < 0, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $h(x) = -x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:**

x	-∞	0	+∞
$f(x) = \alpha x^2$ $\alpha > 0$	-∞ ↗	max 0	↖ +∞

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = αx^2$ για α = -0,5, α = -1, α = -2.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx^2$, με α ≠ 0, είναι μια καμπύλη που λέγεται παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y .
Στα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

✓ Όταν το α είναι θετικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα πάνω, ενώ όταν το α είναι αρνητικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα κάτω.
✓ Καθώς η |α| μεγαλώνει, η παραβολή γίνεται όλο και πιο "κλειστή", δηλαδή "πλησιάζει" τον άξονα y'y .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

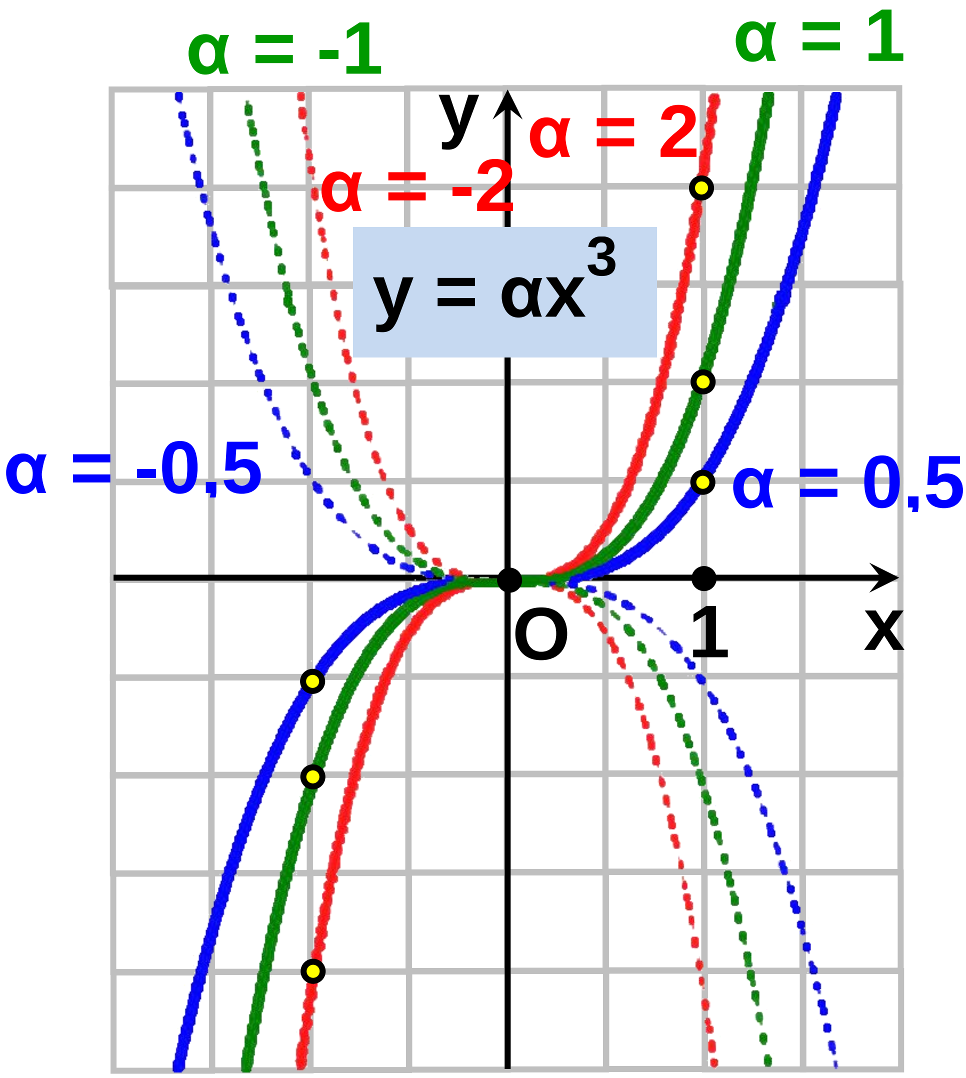
Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $h(x) = \alpha x^3$:

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $h(x) = \alpha x^3$, με $\alpha \neq 0$, είναι περιττή, διότι:

$$h(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -h(x)$$

Επομένως, αρκεί να τη μελετήσουμε και να την παραστήσουμε γραφικά στο διάστημα [0, +∞) και στη συνέχεια να βγάλουμε τα σχετικά συμπεράσματα για όλο το R.



Αν εργαστούμε με τρόπο ανάλογο με εκείνο με τον οποίο εργαστήκαμε για τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = αx^2$, συμπεραίνουμε ότι:

Η συνάρτηση $h(x) = \alpha x^3$, με $\alpha \neq 0$:

• Αν $\alpha > 0$,

✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο R.

✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, όταν το x τείνει στο και απεριόριστα προς τα κάτω όταν το x τείνει στο -∞ .

• Αν $\alpha < 0$,

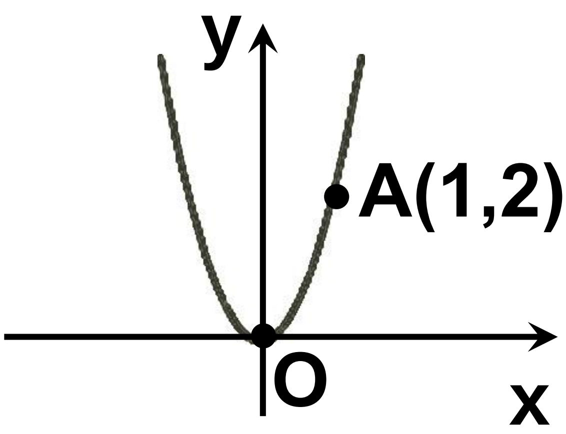
✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο R

✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, όταν το x τείνει στο +∞ και απεριόριστα προς τα πάνω όταν το x τείνει στο -∞ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του παρακάτω σχήματος.



2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 0{,}5x^2$, $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$ και $g(x) = 0{,}5x^2 - 3$

ii) $\psi(x) = -0{,}5x^2$ $h(x) = -0{,}5x^2 -2$ και $q(x) = -0{,}5x^2 + 3$.

3. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 0{,}5x^2$, $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2$ και

$g(x) = 0{,}5\,(x + 2)^2$

ii) $ψ(x) = -0{,}5x^2$, $h(x) = -0{,}5(x - 2)^2$ και $q(x) = -0{,}5(x + 2\,)^2$

4. i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = 1$$

και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις:

$$x^2 \leq 1 \text{ και } x^2 > 1.$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x|x|.$$

2. **Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:**

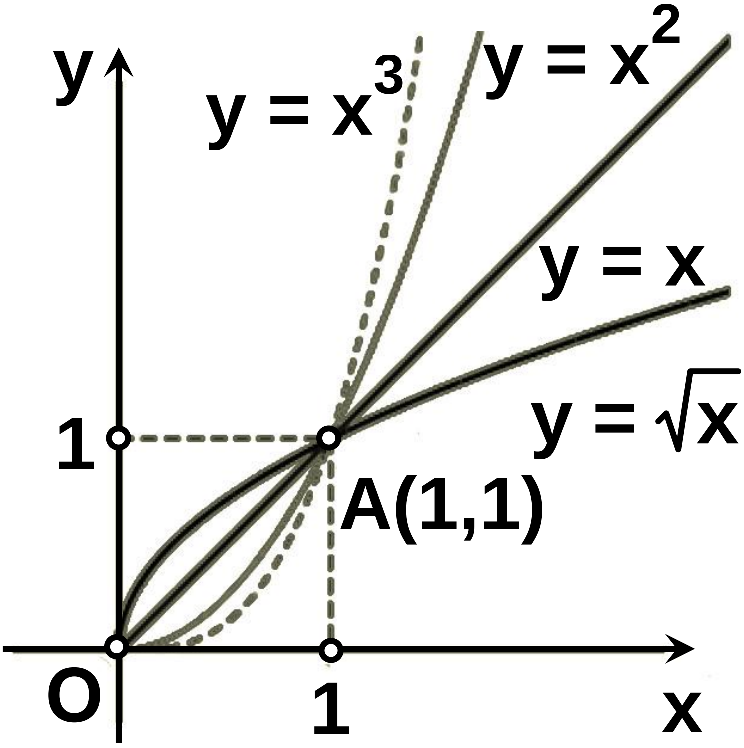
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

και με τη βοήθεια αυτής να βγάλετε τα συμπεράσματα τα σχετικά με τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f.

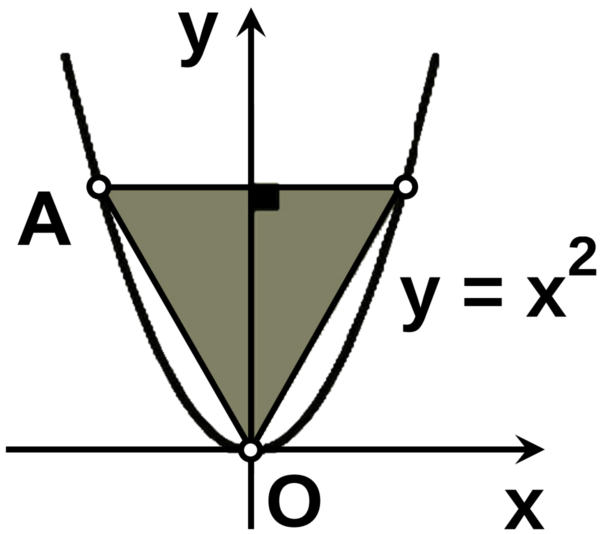
3. **Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:**
$f(x) = x$, $g(x) = x^2$,
$h(x) = x^3$ και $\varphi(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$, τις οποίες χαράξαμε με τη βοήθεια Η/Υ.
i) Να διατάξετε από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τις τιμές x, x^2, x^3 και $\sqrt{x}$ των συναρτήσεων f, g, h και φ:

α) για $0 < x < 1$ και β) για $x > 1$.

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε προηγουμένως.



4. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB}$ είναι ισόπλευρο. Να βρεθεί η τετμημένη του σημείου Α.



5.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$

Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι, η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού όλο το R = (-∞,0) U (0, +∞) και είναι περιττή, διότι για κάθε $x \in R$ ισχύει :

$$g(-x) = \frac{1}{-x} = -g(x)$$

Επομένως, η γραφική της παρά-σταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Γι' αυτό αρχικά θα τη μελετήσουμε και θα την παραστήσουμε γραφικά στο διάστημα (0, +∞) .

Έχουμε λοιπόν:

• **<u>Μονοτονία</u>**: Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα ισχύει $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, οπότε θα έχουμε $g(x_1) > g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

• **<u>Πρόσημο των τιμών της g</u>**: Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $g(x) = \frac{1}{x} > 0$

Επομένως, στο διάστημα $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της g θα βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x.

• **<u>Συμπεριφορά της g για "μικρές" τιμές του x</u>**: Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μικρές" τιμές του x:

x	10^{-10}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-100}	10^{-1000}	…	$\to 0$
$g(x) = \frac{1}{x}$	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	…	$\to +\infty$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x μειώνεται απεριόριστα και παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά στο 0 ή, όπως λέμε, "**τείνει στο 0**", το $\frac{1}{x}$ αυξάνεται απεριόριστα και **τείνει στο** +∞. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x "πλησιάζει" το 0 από τα δεξιά, η γραφική παράσταση της g τείνει να συμπέσει με τον ημιάξονα Oy . Γι’ αυτό ο άξονας y'y λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της g προς τα πάνω.

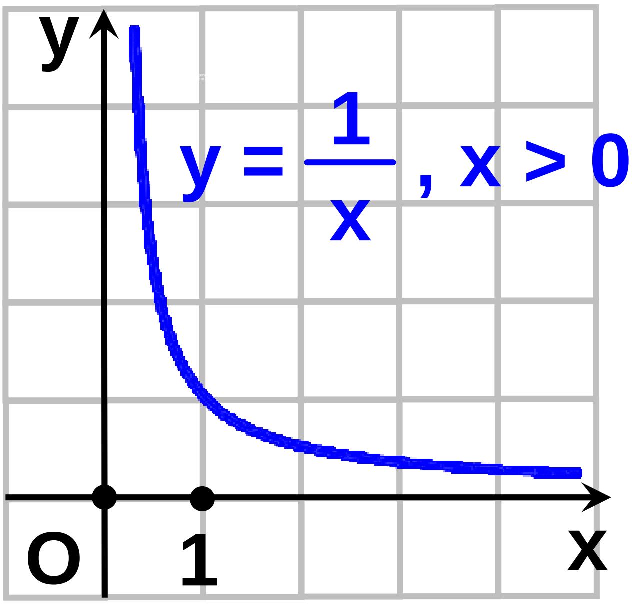
• **<u>Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x</u>: Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του x:**

x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	…	$\to +\infty$
$g(x) = \dfrac{1}{x}$	10^{-10}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-100}	10^{-1000}	…	$\to 0$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα και τείνει στο +∞, το $\dfrac{1}{x}$ μειώνεται απεριόριστα και τείνει στο 0. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x "απομακρύνεται" προς το +∞, η γραφική παράσταση της g τείνει να συμπέσει με τον ημιάξονα Ox .

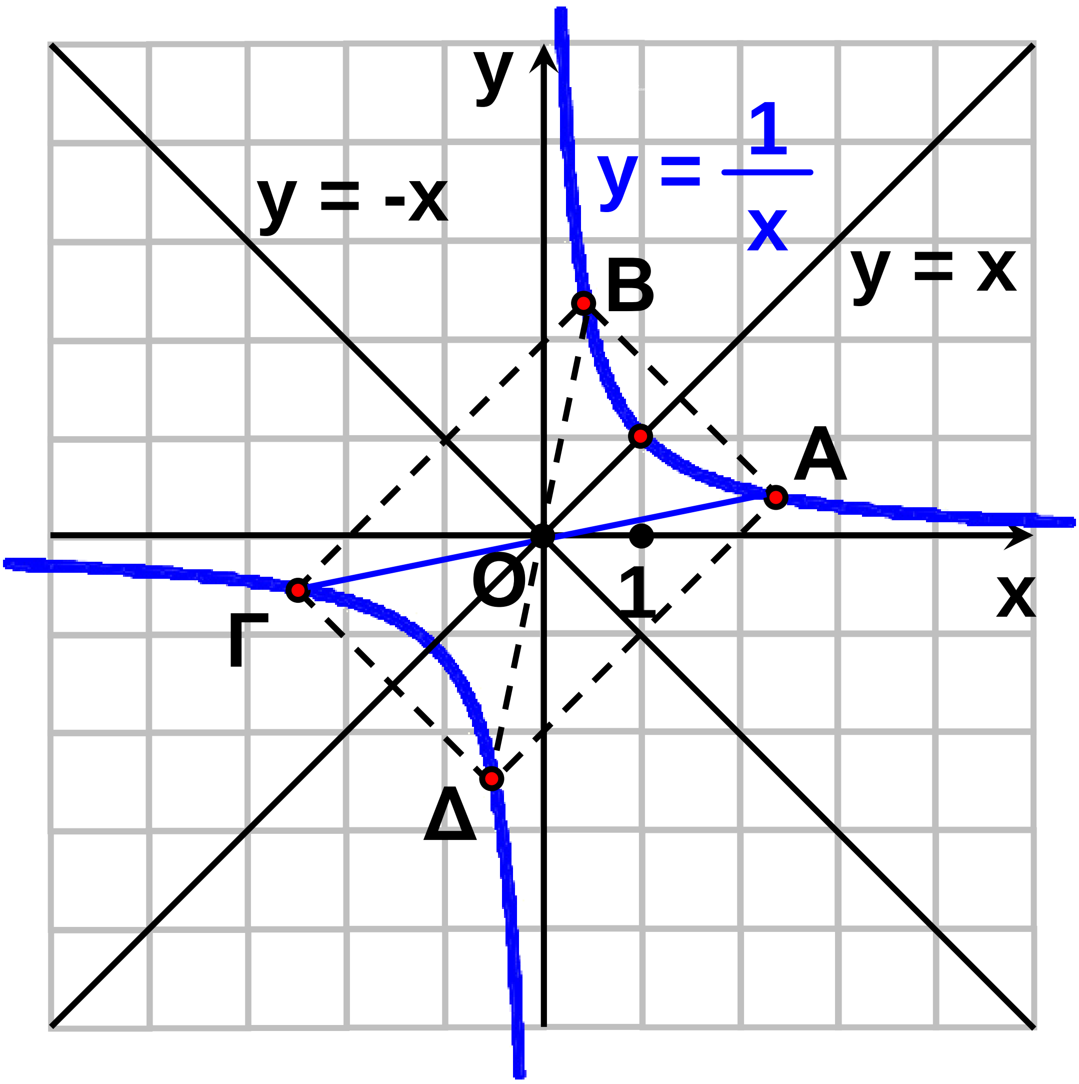
Γι’ αυτό ο άξονας x'x λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g προς τα δεξιά.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και παίρνοντας ένα πίνακα τιμών της g για θετικές τιμές του x , μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα (0, +∞) .



Αν τώρα πάρουμε το συμμετρικό της παραπάνω καμπύλης ως προς την αρχή των αξόνων, τότε θα έχουμε τη γραφική παράσταση της

$g(x) = \dfrac{1}{x}$ σε όλο το R, από την οποία συμπεραίνουμε ότι:



Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{x}$:

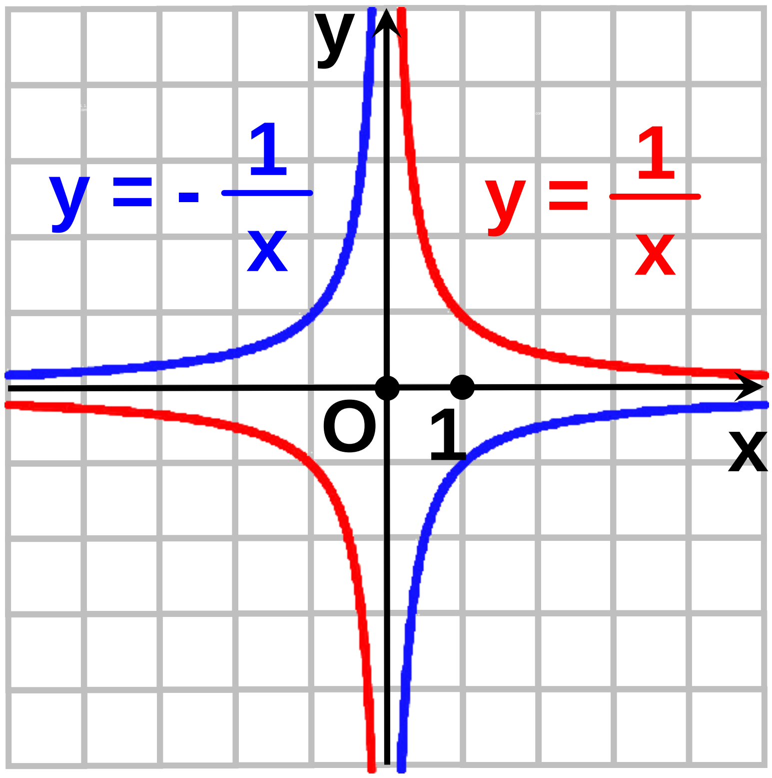
• Είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0, +\infty)$.

• Έχει γραφική παράσταση η οποία:
✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο 1^{o} και έναν στο 3^{o} τεταρτημόριο,
✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,
✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες y = x και y = -x, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος
✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα x'x και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y' y .

Η συνάρτηση $h(x) = -\dfrac{1}{x}$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $h(x) = -\dfrac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει

$$h(x) = -g(x) .$$



Επομένως, η γραφική παράσταση της $h(x) = -\frac{1}{x}$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x) = \frac{1}{x}$ ως προς τον άξονα x'x, οπότε, η συνάρτηση $h(x) = -\frac{1}{x}$:

- **Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0, +\infty)$.**

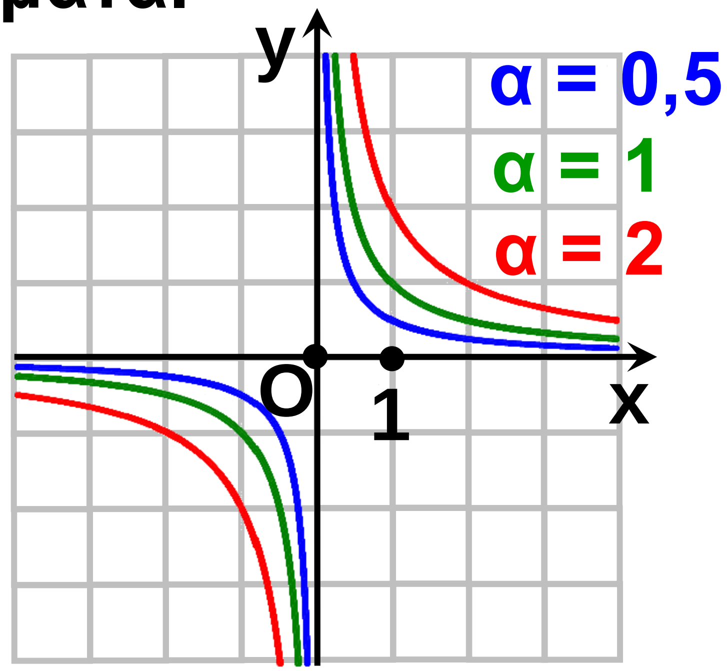
• Έχει γραφική παράσταση η οποία:
✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο 2ο και έναν στο 4ο τεταρτημόριο,
✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,
✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες y = x και y = -x, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος
✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα x'x και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y' y.

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
• Αν $\alpha > 0$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση

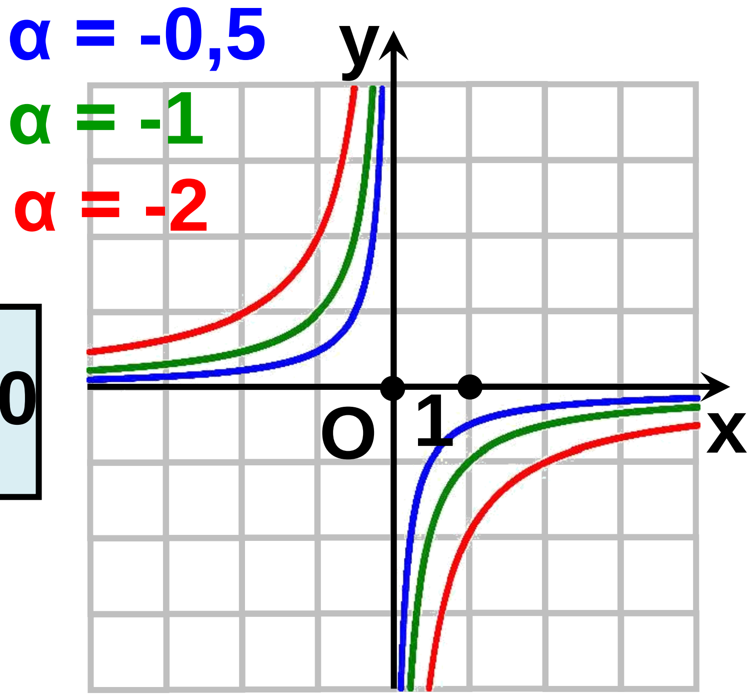
$g(x) = \dfrac{1}{x}$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα.

$$y = \frac{\alpha}{x},\ \alpha > 0$$



Σχήμα α'

$$y = \frac{\alpha}{x},\ \alpha < 0$$



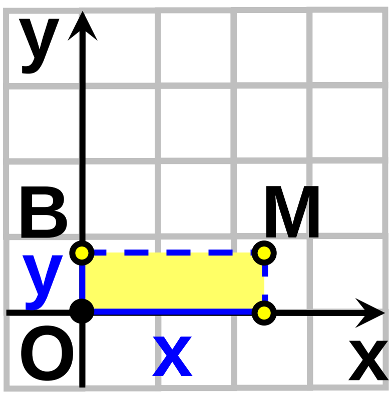
Σχήμα β'

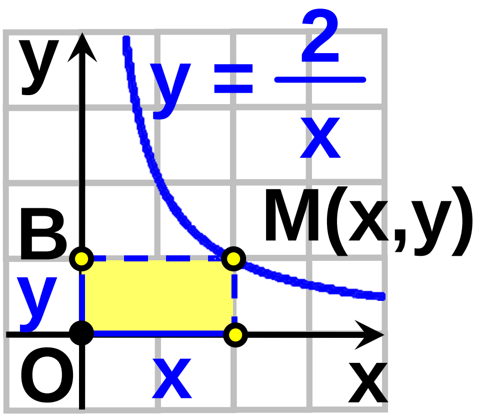
Στο σχήμα α' δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = \frac{α}{x}$ για α = 0,5, α = 1 και α = 2 .

• Αν α < 0, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $h(x) = -\frac{1}{x}$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα.
Στο σχήμα β' δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = \frac{α}{x}$ για α = -0,5, α = -1 και α = -2.
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{α}{x}$, με α ≠ 0, λέγεται ισοσκελής υπερβολή με κέντρο την αρχή των αξόνων και ασύμπτωτες τους άξονες x' x και y' y.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Μ κινείται στο 1^{o} τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων, έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογώνιου ΟΑΜΒ να παραμένει σταθερό και ίσο με 2τ.μ. Να αποδειχτεί ότι το σημείο Μ διαγράφει τον έναν κλάδο μιας ισοσκελούς υπερβολής.





ΛΥΣΗ

Αν με x συμβολίσουμε το μήκος και με y το πλάτος του ορθογωνίου, επειδή το εμβαδόν του είναι ίσο με

2τμ, θα ισχύει xy = 2 και x, y > 0 , οπότε θα έχουμε:

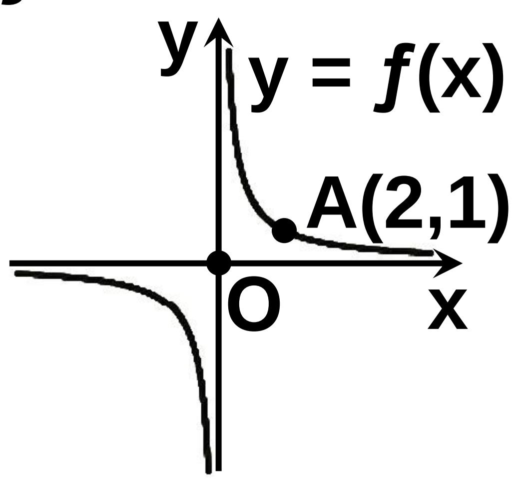
$$y = \frac{2}{x} \text{ , με } x > 0$$

Άρα το σημείο Μ θα διαγράφει τον κλάδο της υπερβολής $y = \frac{2}{x}$ που βρίσκεται στο 1^{o} τεταρτημόριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής του παρακάτω σχήματος.**



2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$

και $g(x) = \dfrac{1}{x} - 3$

ii) $\psi(x) = -\dfrac{1}{x}$, $h(x) = -\dfrac{1}{x} - 2$

και $q(x) = -\dfrac{1}{x} + 3$.

3. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

και $g(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

ii) $\psi(x) = -\dfrac{1}{x}$, $h(x) = -\dfrac{1}{x - 2}$

και $q(x) = -\dfrac{1}{x + 3}$.

4. i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 1$ και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις:

$$\frac{1}{x} \leq 1 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x} > x^2$$

ii) Να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τα παραπάνω συμπεράσματα.

5. Ομοίως για τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2$ και τις ανισώσεις:

$$\frac{1}{x} \leq x^2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x} > x^2$$

6. Οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$

μεταβάλλονται έτσι, ώστε το εμβαδόν του να παραμένει σταθερό και ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες. Να εκφράσετε το μήκος y της ΑΓ συναρτήσει του μήκους x της ΑΒ και στη συνέχεια να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

5.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = αx^2 + βx + γ$

Θα μελετήσουμε αρχικά τη συνάρτηση $g(x) = 2x^2 + 12x + 20$ που είναι ειδική περίπτωση της $f(x) = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$.
Για τη μελέτη της συνάρτησης g μετασχηματίζουμε τον τύπο της ως εξής:

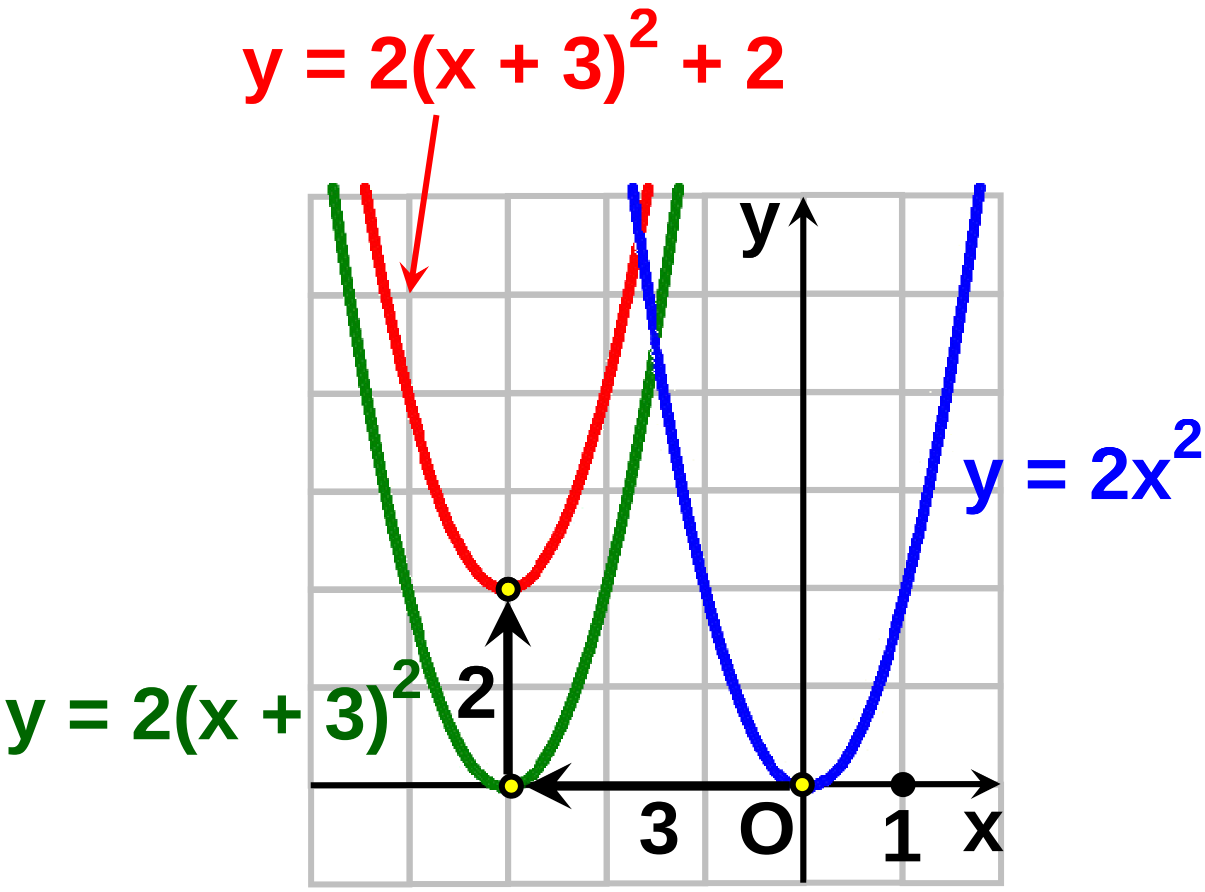
$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2x^2 + 12x + 20 \\
&= 2(x^2 + 6x + 10) \\
&= 2[x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 10] \\
&= 2(x + 3)^2 + 1 \\
&= 2(x + 3)^2 + 2
\end{aligned}
$$

Έτσι έχουμε

$$g(x) = 2(x + 3)^2 + 2$$

Επομένως, για να παραστήσουμε γραφικά την g , χαράσσουμε πρώτα την $y = 2(x + 3)^2$ που προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = 2x^2$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά, και στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = 2(x + 3)^2 + 2$ που προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = 2(x + 3)^2$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Άρα, η γραφική παράσταση της $g(x) = 2(x + 3)^2 + 2$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Είναι δηλαδή μια παραβολή ανοικτή προς τα άνω με κορυφή το σημείο Κ(-3,2) και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = -3.



Θα μελετήσουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$.

Όπως είδαμε στην §3.2 (μορφές τριωνύμου), η f(x) παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$$

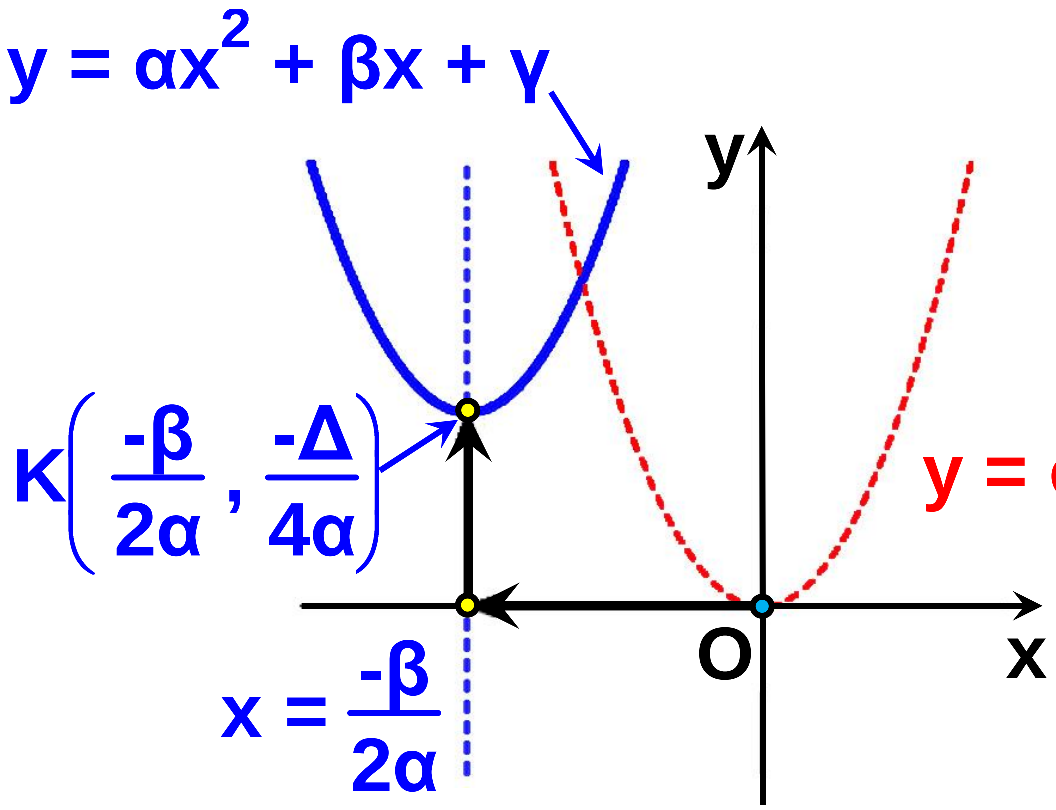
Επομένως η γραφική της παράστα-ση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = \alpha x^2$, μιας οριζόντιας και μιας κατακόρυ-φης, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $K = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$. Συνεπώς είναι

και αυτή μια παραβολή, που έχει

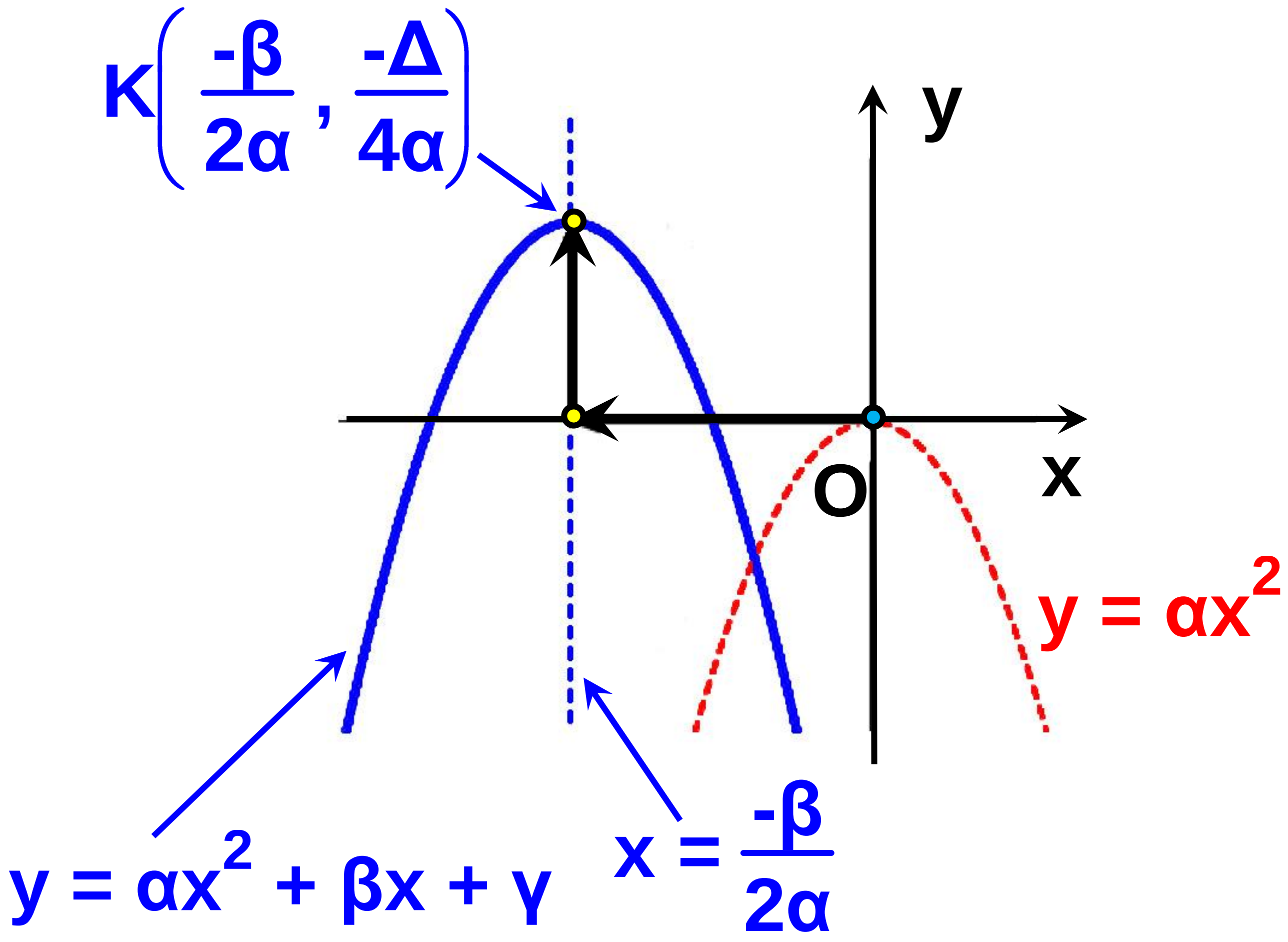
κορυφή το σημείο $K = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

άξονα συμμετρίας την ευθεία

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}.$$



y = αx² + βx + γ
y
K(-β/2α , -Δ/4α)
y = αx²
O
x
x = -β/2α



K(-β/2α , -Δ/4α)
y
x
O
y = αx²
y = αx² + βx + γ
x = -β/2α

Άρα, η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$:

• Αν $\alpha > 0$,

✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$

και γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$\left[-\dfrac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$$

✓ Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$,

το $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) = -\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

x	$-\infty$	$\dfrac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha > 0$	$-\infty$ $\searrow$	$\dfrac{-\Delta}{4\alpha}$ min	$\nearrow$ $+\infty$

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παραπάνω πίνακα.

• Αν $α < 0$, η συνάρτηση $f(x) = αx^2 + βx + γ$:

✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{β}{2α}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{β}{2α}, +\infty\right)$

✓ Παρουσιάζει μέγιστο $x = -\frac{β}{2α}$, το $f\left(-\frac{β}{2α}\right) = -\frac{Δ}{4α}$.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha > 0$	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{-\Delta}{4\alpha}$ max	$\searrow$ $+\infty$

Τέλος η γραφική παράσταση της *f* είναι μια παραβολή που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Γ(0, γ) , διότι *f*(0) = γ, ενώ για τα σημεία τομής της με τον άξονα x'x παρατηρούμε ότι:

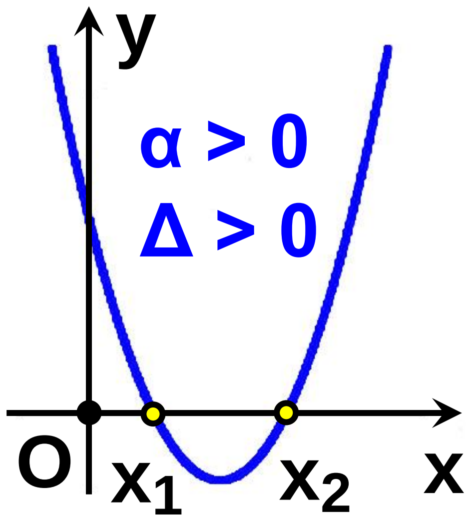
•Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 και επομένως η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα x'x σε δύο σημεία, τα $A(x_1,0)$ και $B(x_2,0)$ (Σχ. α')·

• Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο έχει διπλή

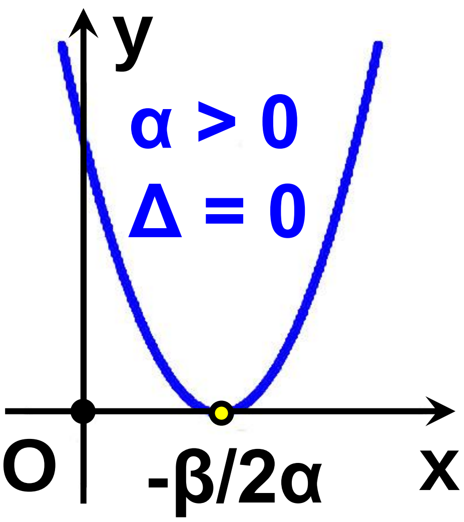
ρίζα την $-\frac{\beta}{2\alpha}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η παραβολή εφάπτεται του άξονα x'x στο σημείο $A\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, 0\right)$ (Σχ· β')·

- Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως η παραβολή δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x'x (Σχ. γ').

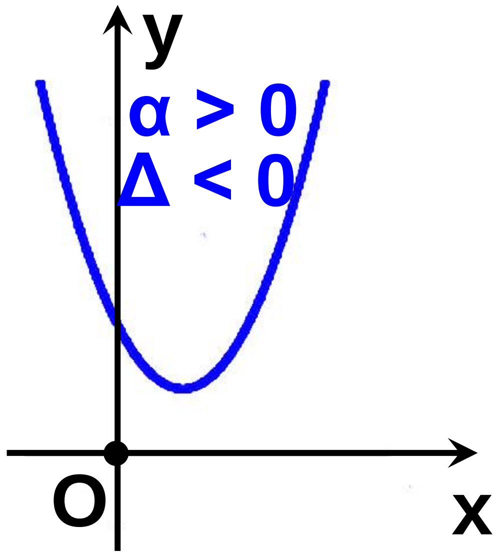
Η γραφική παράσταση της *f* εξαρτάται από το πρόσημο των α και Δ και φαίνεται κατά περίπτωση στα παρακάτω σχήματα:



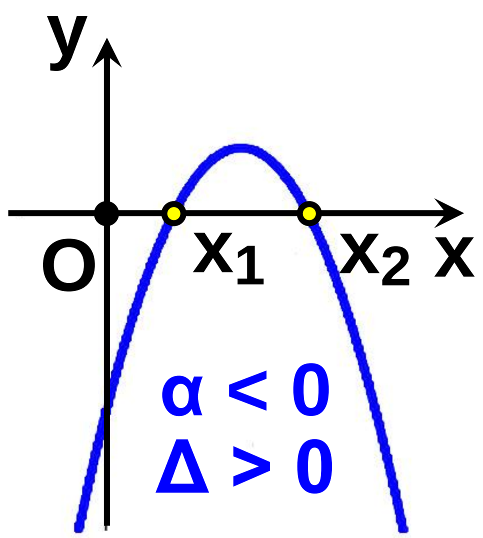
<u>Σχήμα α'</u>



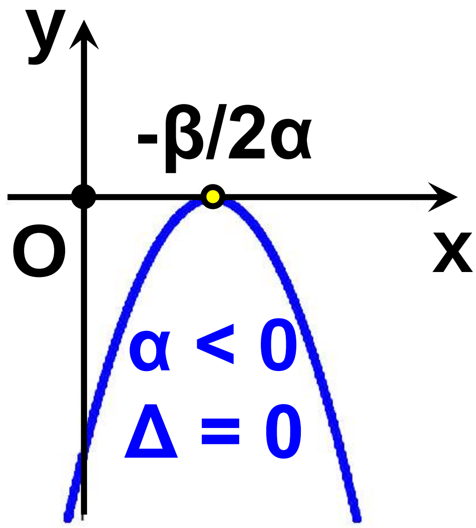
<u>Σχήμα β'</u>



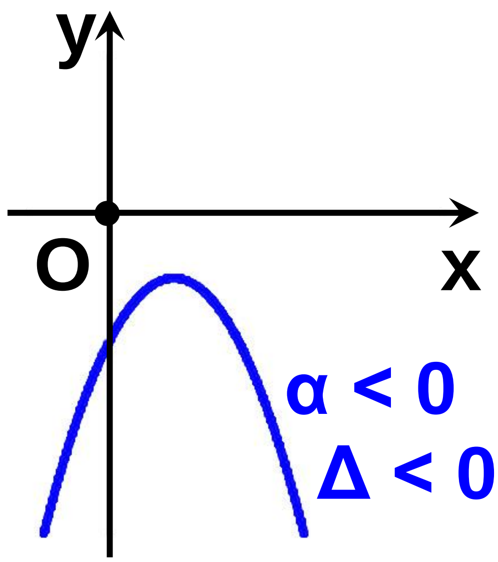
<u>**Σχήμα γ'**</u>



<u>**Σχήμα α'**</u>



<u>**Σχήμα β'**</u>



<u>**Σχήμα γ'**</u>

Τα συμπεράσματα της §3.2 για το πρόσημο του τριωνύμου προκύπτουν άμεσα και με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

ΛΥΣΗ

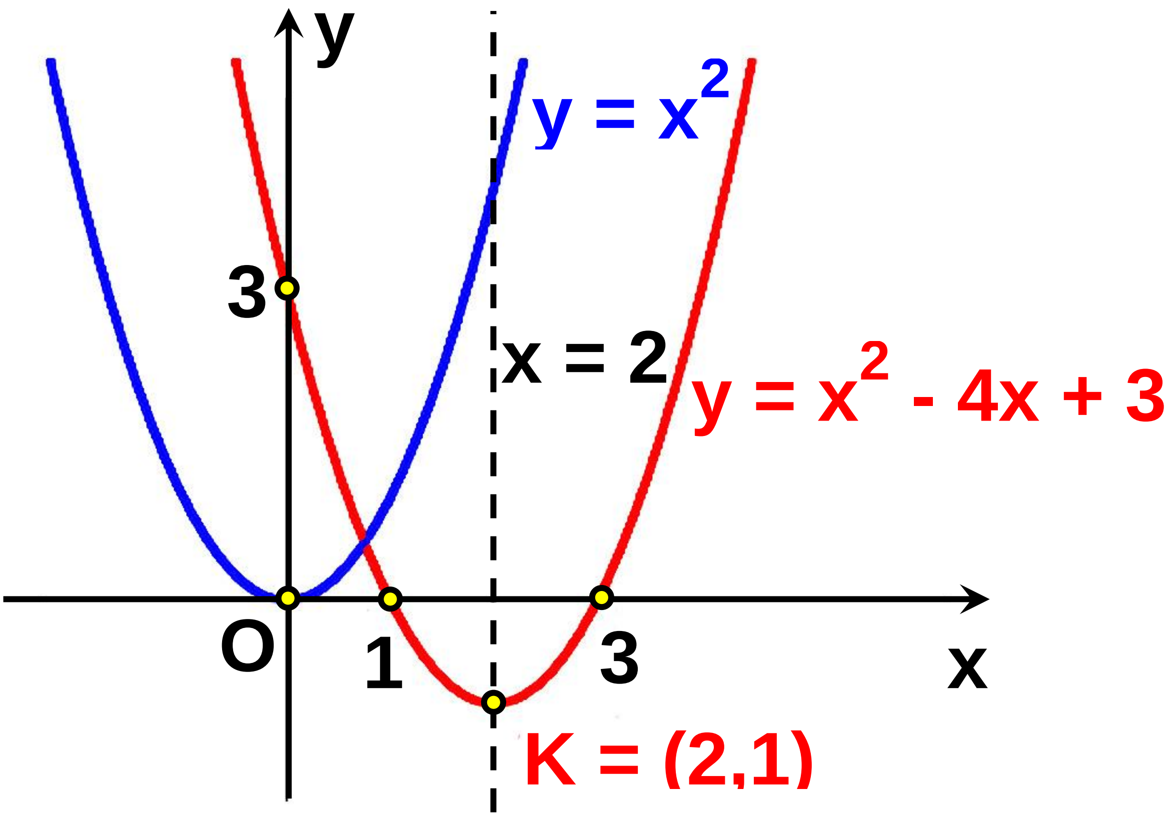
Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$

είναι $\alpha = 1 > 0$, $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = 2$ και

$$\frac{-\Delta}{4\alpha} = f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = f(2) = -1 .$$

Επομένως έχουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 4x + 3$	$+\infty$ ↘	-1 min	↗ $+\infty$



Δηλαδή η συνάρτηση *f*,

✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,2] και γνησίως αύξουσα στο [2, +∞),

✓ Παρουσιάζει για x = 2 ελάχιστο, το *f*(2) = -1.

Επιπλέον, η γραφική παράσταση της *f* είναι μια παραβολή η οποία:

✓ Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 2 και

✓ Τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία με τετμημένες 1 και 3 αντιστοίχως,

που είναι οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$, και τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη 3.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ στη μορφή $f(x) = \alpha(x - p)^2 + q$ και στη συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της f.

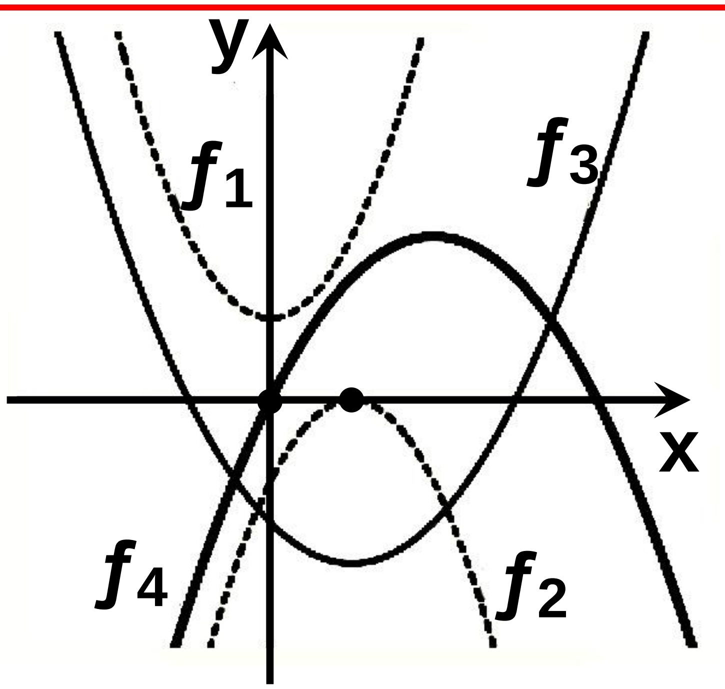
ii) Να κάνετε το ίδιο και για τη συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 8x - 9$, θεωρώντας ως g την $g(x) = -2x^2$.

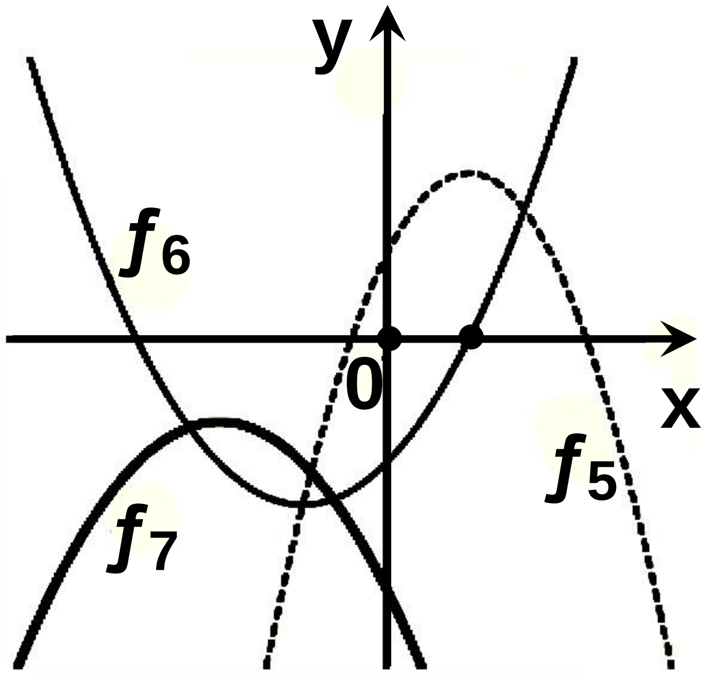
2. Να βρείτε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ και
β) $g(x) = -3x^2 - 5x + 2$.

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις
α) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ και
β) $g(x) = -2x^2 + 8x - 9$.

4. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις επτά τριωνύμων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$. Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα που ακολουθεί με το πρόσημο των συντελεστών και της διακρίνουσας των αντίστοιχων τριωνύμων.





Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+						
β	0						
γ	+						
Δ	-						

<u>Β΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Δίνεται η παραβολή $y = x^2 + (k+1)x + k$. Να καθορίσετε τις τιμές του k, για τις οποίες η παραβολή:

i) Εφάπτεται του άξονα x' x.

ii) Έχει τον y'y άξονα συμμετρίας.

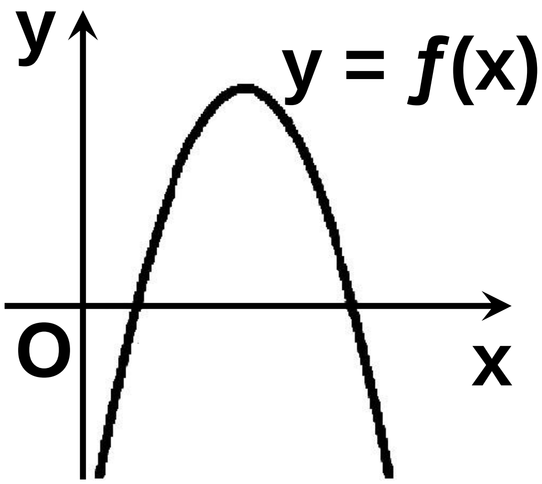
iii) Έχει για κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη -4. Ποια είναι η τετμημένη της κορυφής;

2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + y$. Να βρείτε:

i) Το πρόσημο του α.

ii) Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και

iii) Τους συντελεστές του τριωνύμου, αν δίνεται ότι β = 6.

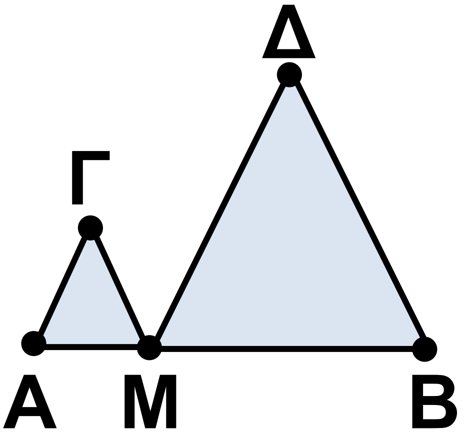


3. Οι διαστάσεις x,y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται, έτσι ώστε η περίμετρος του να παραμένει σταθερή και ίση με 20 μ .

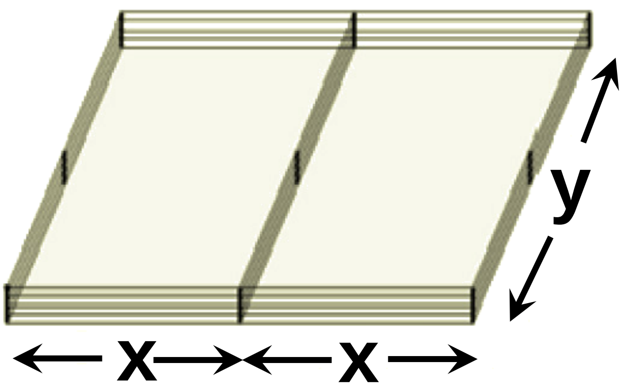
i) Να εκφράσετε το y συναρτήσει του x και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο Ε = f(x) που δίνει το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του x.

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται για x = 5 και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του.

4. Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6cm. Με πλευρές τα ΜΑ και ΜΒ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα. Για ποια θέση του Μ το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ελάχιστο;



5. Ένας κτηνοτρόφος έχει σύρμα 200m και θέλει να περιφράξει δύο συνεχόμενους ορθογώνιους υπαίθριους χώρους με διαστάσεις x και y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για ποιες τιμές των x και y το εμβαδόν και των δύο χώρων μεγιστοποιείται;



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1.	**Αν η παραβολή $y = αx^2$, $α \neq 0$ διέρχεται από το σημείο Α(1,2), τότε βρίσκεται στο $3^ο$ και $4^ο$ τεταρτημόριο.**	**Α**	**Ψ**
2.	**Αν το τριώνυμο $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$, τότε έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$.**	**Α**	**Ψ**

3.	Για οποιουσδήποτε $α, β \in R$ η παραβολή $y = αx^2$ και η υπερβολή $y = \frac{β}{x}$ έχουν ένα και μοναδικό κοινό σημείο.	Α	Ψ
4.	Η υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ και η ευθεία $y = -x$ τέμνονται.	Α	Ψ

II. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω δύο περιπτώσεις με τα σύμβολα της ισότητας ή της ανισότητας.

1. Αν το τριώνυμο $f(x) = 2x^2 + βx + γ$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$, τότε θα ισχύει:

$f(-5)$ … 0 , $f(1)$ … 0, $f(5)$ … 0,
γ … 0, β … -4.

2. Αν το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + βx + γ$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -3$ και $x_2 = 1$, θα ισχύει:

$f(-5)$ … 0, $f(-2)$ … 0 , $f(5)$ … 0,
γ … 0, β … -2.

ΙΙΙ. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = αx^2 + βx + γ$, α ≠ 0. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν α = 2 και το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο Κ (1, -3), τότε

Α) $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$
Β) $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$
Γ) $f(x) = 2(x + 1)^2 + 3$
Δ) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$.

2. Αν $f(1) < 0$, $f(3) > 0$ και $f(5) < 0$, τότε

Α) Δ = 0 και α > 0
Β) Δ > 0 και α > 0
Γ) Δ > 0 και α < 0 .

3. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο Κ(1,2) και α > 0 , τότε:

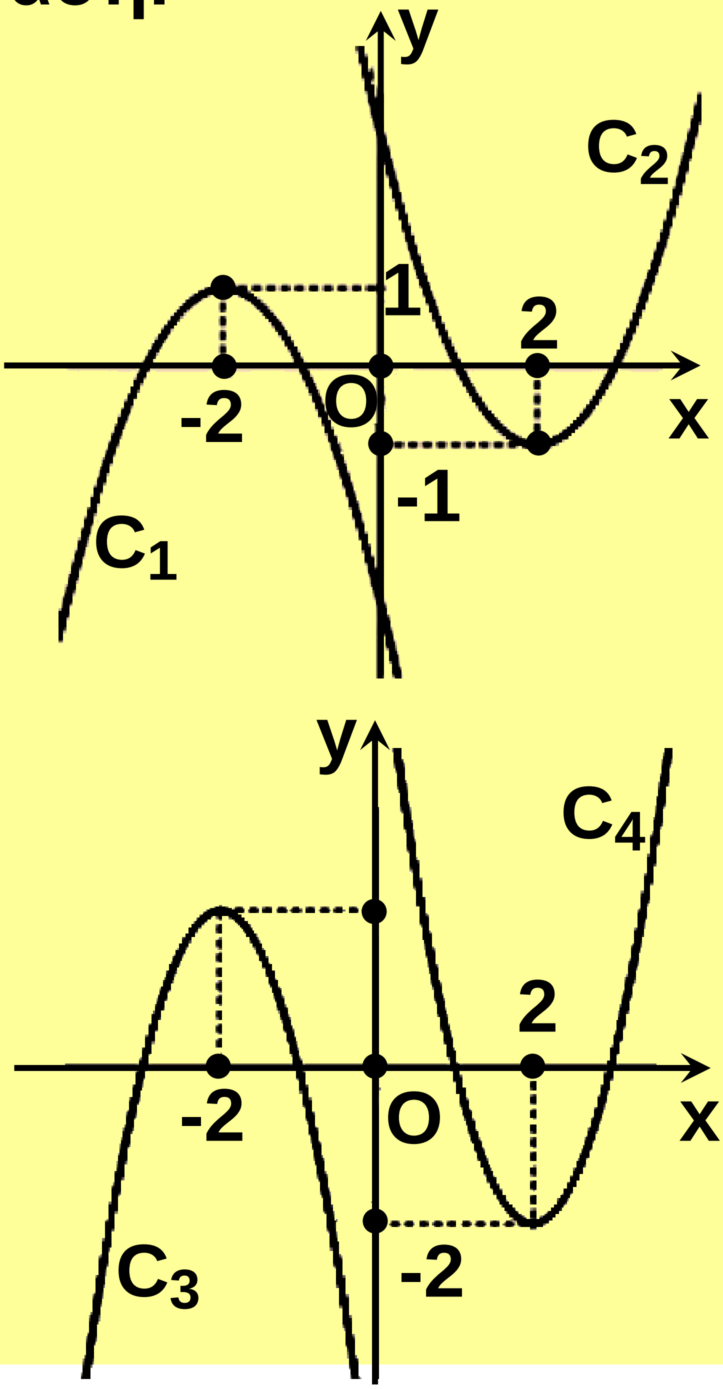
Α) Δ > 0 **Β) Δ = 0**
Γ) Δ < 0 **Δ) y < 0.**

4. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο Κ (1,0), τότε

Α) β = 0 **Β) Δ < 0**
Γ) Δ > 0 **Δ) Δ = 0.**

IV. Οι παρακάτω καμπύλες C_1, C_2, C_3 και C_4 είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$f_1(x) = x^2 - 4x + y_1$,
$f_2(x) = 2x^2 - 8x + y_2$,
$f_3(x) = -x^2 - 4x + y_3$ **και**
$f_4(x) = -2x^2 - 8x + y_4$, **όχι όμως με την ίδια σειρά. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις παραπάνω**

συναρτήσεις με τη γραφική της παράσταση.



f_1	f_2	f_3	f_4

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 3ου ΤΟΜΟΥ